

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

TC 2

Tensorrekening voor Physici.

Cursus 1947

Schouten J.A.



1947

Cursus Tensorrekening voor Physici

door

Prof.dr. J.A. Schouten

INHOUD

I. Ruimten gedefinieerd door lineaire groepen.

- § 1. De groep G_n .
- § 2. Ondergroepen van G_n .
- § 3. De $\mathcal{L}_p$ in $\mathcal{L}_m$.

II. Geometrische objecten in

- § 4. Definities
- § 5. Scalair en vectoren
- § 6. Affinoren en affinordichtheden
- § 7. Invariante processen
- § 8. Tensoren
- § 9. ρ -vectoren
- § 10. Dichtheden
- § 11. De fundamentealtensor

III. Identificering van grootheden na invoering van een ondergroep van G_n

- § 12. Introductie van een eenheidsvolume (ondergroep G_{27})
- § 13. Introductie van een fundamentealtensor (ondergroep G_{27})
- § 14. Introductie van een schroefzin (ondergroep der transformaties met $\Delta > 0$)
- § 15. Introductie van een fundamentealtensor en een schroefzin (ondergroep G_{18})

IV. Geometrische objecten in

- § 16. De X_m
- § 17. Geometrische objecten in X_m
- § 18. Invariante Differentiaaloperatoren I: Grad, Div en Rot
- § 19. I.D. II Het theorema van Stokes.
- § 20. I.D. III De afgeleide van Lie.
- § 21. I.D. IV De Lagrange afgeleide.
- § 22. Anholonome coördinatenstelsels in X_m

V. De meetkunde in een met een gegeven overbrenging.

- § 23. Overbrengingen in X_n
- § 24. Geodetische lijnen in $\mathcal{L}_n$
- § 25. Normaalcoördinaten in A_m
- § 26. De V_n
- § 27. Kromming van een A_m
- § 28. De covariante differentiatie in anholonome coördinaten.

vervolg inhoud:

VI. Fysische objecten en hun dimensies.

- § 29. Absolute en relatieve dimensies.
- § 30. Constructie van het geometrische beeld.

VII. Elasticiteit in kristallen

- § 31. Deformatie
- § 32. Kracht en spanning
- § 33. De elasticiteitscoëfficiënten.
- § 34. Dielectrische- en piezoelectrische constanten.
- § 35. Kristalkernen.
- § 36. Piezoelectrisch- en piezomagnetisch effect.
- § 37. Golven in homogene anisotrope media.
- § 38. De kwartaresonator (α -kwarts, trigonaal 10)

VIII. Klassieke dynamica.

- § 39. Holonome stelsels
- § 40. Anholonome coördinaten en anholonome stelsels.
- § 41. Homogenizatie der vergelijkingen van Lagrange en van Hamilton.
- § 42. De eikonaalfuncties.
- § 43. Bijzondere gevallen van eerste integralen.

VOORDRACHT TE HOUDEN DOOR PROF. Dr. J. A. SCHOUTEN: TENSORREKENING VOOR

PHYSICI, NAJAAR 1947.

I RUIMTEN GEDEFINIEERD DOOR LINEAIRE GROEPEN.

§ 1. De groep G_a .

De groep G_a (affine groep) bestaat uit de lineaire transformaties

$$1.1) \quad x^{k'} = a^{k'} + A_{\kappa}^{k'} x^{\kappa} \quad ; \quad \Delta \stackrel{\text{def}}{=} \text{Det} (A_{\kappa}^{k'}) \neq 0 \quad 1) \\ a^{k'} = \text{constant}; A_{\kappa}^{k'} = \text{constant}$$

De omkering luidt:

$$1.2) \quad x^{\kappa} = a^{\kappa} + A_{\kappa'}^{\kappa} x^{\kappa'}$$

met het verband

$$1.3) \quad A_{\kappa}^{k'} A_{\lambda'}^{\kappa} = \begin{cases} 1, & \kappa = \lambda' \\ 0, & \kappa \neq \lambda' \end{cases}; \quad A_{\kappa}^{k'} A_{\lambda}^{\kappa} = \begin{cases} 1, & \kappa = \lambda \\ 0, & \kappa \neq \lambda \end{cases}$$

$$A_{\kappa}^{k'} a^{\kappa} = -a^{k'}; \quad A_{\kappa}^{k'} a^{\kappa} = -a^{k'}$$

Om A_{λ}^{κ} voor bepaalde waarden van κ en λ te berekenen schrijf uit de matrix van A_{λ}^{κ}

$$1.4) \quad \left\| \begin{array}{ccc} A_1^{\kappa} & \dots & A_n^{\kappa} \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^{\kappa'} & \dots & A_n^{\kappa'} \end{array} \right\|$$

vorm de minor van het element A_{λ}^{κ} door de κ -de rij en de λ -de kolom te schrappen en te vermenigvuldigen met $(-1)^{\kappa+\lambda}$. Dan is A_{λ}^{κ} deze minor als determinant opgevat gedeeld door Δ . Door uitschrijven van $\Delta / (A_{\lambda}^{\kappa})$ bewijst men dat

$$1.5) \quad A_{\lambda}^{\kappa} = \Delta^{-1} \frac{\partial \Delta}{\partial A_{\lambda}^{\kappa}} = \frac{\partial \log \Delta}{\partial A_{\lambda}^{\kappa}}$$

Ieder stelsel waarden x^{κ} heet een punt. De waarden x^{κ} heten de coördinaten van het punt en de $x^{\kappa'}$ andere coördinaten van hetzelfde punt. Alle coördinatenstelsels die met behulp van (1,1) uit elkaar kunnen worden gemaakt heten toegelaten (allowable) coördinatenstelsels. De verzameling van alle punten, toegerust met alle toegelaten coördinatenstelsels, heet een affine ruimte of E_n .

In alle formules komen voor kernletters (kernel letters) b.v. A, z , lopende indices b.v. κ, κ' en vaste indices b.v. $2, 3, \dots$. Bij elk coördinatenstelsel behoort een soort lopende indices en een stel vaste indices. Een coördinatenstelsel wordt aangeduid door een van zijn lopende indices tussen haakjes, b.v. (κ) . Punten en kernletters veranderen niet bij coördinatenstelseltransformaties maar wel de lopende en vaste indices.

1) De indices $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma, \tau, \omega$ doorlopen steeds de waarden $1, \dots, n$ (cursief) de indices $\kappa', \lambda', \mu', \nu', \rho', \sigma', \tau', \omega'$ steeds de waarden $1', \dots, n'$ (cursief). Over twee gelijke indices waarvan één boven en één onder staat, wordt steeds automatisch gesommeerd. (Einstein conventie).

Er zijn andere transformaties, punttransformaties, waarbij de punten veranderen maar het coördinatenstelsel niet. Aldus stelt

$$1.6) \quad y^{\kappa} = p^{\kappa} + P_{\lambda}^{\kappa} x^{\lambda}$$

$p^{\kappa} = \text{constant}; \quad P_{\lambda}^{\kappa} = \text{constant}$

een affine punttransformatie voor.

Men verandert een kernletter door een andere letter te nemen, door een accent toe te voegen of door een index boven of onder de kernletter te plaatsen, bijv. y^{κ} , $y^{\bar{\kappa}}$. Indices rechts boven of onder worden bij voorkeur gereserveerd voor lopende en vaste indices (uitzondering hierop later).

Men doet goed aan deze principes der kern-index methode (kernel-index method) de hand te houden.

§ 2. Ondergroepen van G_n

De volgende ondergroepen worden gebruikt:

- a. G_n^{κ} : alle lineaire homogene transformaties. De oorsprong blijft invariant. De ruimte heet nu een gecentreerde E_n .
 - b. G_n^{κ} : alle equivoluminaire lineaire homogene transformaties. $\Delta = 1$. Volumen blijven invariant. Gegentreerde E_n met gegeven maatvolume.
 - c. G_n^{κ} : alle speciaalaffine transformaties. $\Delta = \pm 1$. Volumen en schroefzin blijven invariant. Gegentreerde E_n met gegeven maatvolume en schroefzin.
- Een schroefzin (screwsense) in E_n is bepaald door n richtingen met zin (pijl) niet gelegen in enige E_{n-1} , in een bepaalde volgorde. Ieder coördinatenstelsel bepaalt dus een schroefzin.
- d. G_n^{κ} : alle orthogonale transformaties (draaiingen en spiegelingen). $\Delta = \pm 1$. De ruimte heet nu een R_n . In een R_n bestaan de begrippen lengte en hoek.
 - e. G_n^{κ} : alle rotaties. $\Delta = \pm 1$. Georiënteerde R_n (R_n met een gegeven schroefzin).

In al deze ruimten zijn de toegelaten coördinatensystemen die systemen, die uit een oorspronkelijk systeem kunnen worden verkregen door de transformaties der ten grondslag gelegde groep.

Bij elke groep behoort een meetkunde, d.w.z. een theorie van alle eigenschappen van figuren, die invariant zijn bij die groep. De betrekkingen tussen de meetkunde van een groep en die van zijn ondergroepen worden vastgelegd in het beginsel van Q. Klein (1872).

Is G een groep en G' de ondergroep bestaande uit alle transformaties van G die een stel figuren A invariant laten, dan is de meetkunde van de een of andere figuur ten opzichte van G' dezelfde als de meetkunde van die figuur tezamen met het stel A ten opzichte van G .

§ 3. De E_n in E_n

Beschouw de vergelijkingen:

$$3.1) \quad C_{\lambda}^{\kappa} x^{\lambda} + C^{\kappa} = 0 \quad ; \quad \kappa = 1, \dots, n$$

$C_{\lambda}^{\kappa} = \text{constant}; \quad C^{\kappa} = \text{constant}$

en onderstel, dat de matrix van C_{λ}^{κ} de hoogste rang (rank), d.i. rang n

- 1) Wij maken steeds streng onderscheid tussen verticale en cursi indices.
- 2) De rang van een matrix is $\neq$ als er tenminste één onderdeterminant met r rijen bestaat die niet nul is maar geen onderdeterminant met meer dan r rijen.

Men kunnen p -ader variabelen worden opgelost als functies van de overige p . In de verzameling van alle punten voldoende aan (3.1) kunnen deze laatste als coördinaten worden gebruikt. Aangezien zij onderworpen zijn aan de affine groep die ontstaat als men de overigen constant laat (een ondergroep van G_n) is de verzameling een ξ_p . Wij noemen deze ξ_p in ξ_n de nuluitgebreidheid van (3.1) en (3.1) zijn nulvorm. De oplossing van (3.1) kan ook geschreven worden in de parametervorm

$$(3.2) \quad x^k = B_{\beta}^k \eta^{\beta} + B^k, \quad \beta = 1, \dots, p$$

met p parameters η^{β} . Ook de η^{β} kunnen als coördinaten in ξ_p worden gebruikt. (3.2) heet de parametervorm van ξ_p . Er gelden de betrekkingen

$$(3.3) \quad C_{\lambda}^{\alpha} B_{\beta}^{\lambda} = 0; \quad C_{\lambda}^{\alpha} B^{\lambda} + C^{\alpha} = 0, \quad \beta = 1, \dots, p; \quad \alpha = p+1, \dots, n$$

Een punttransformatie:

$$(3.4) \quad x^k = x^k + C^k, \quad C^k = \text{constant}$$

heet een translatie. Dit begrip is invariant bij G_n . Twee ξ_p 's heten parallel wanneer zij door een translatie in elkaar kunnen worden overgevoerd. Men zegt dan ook, dat zij dezelfde p -richting hebben. Worden de punten "in het oneindige" van ξ_p opgevat als een oneigenlijke ξ_{p-1} , dan kan men ook zeggen, dat twee parallele ξ_p 's een oneigenlijke ξ_{p-1} gemeen hebben.

Een ξ_0 heet punt, een ξ_1 lijn, een ξ_2 vlak en een ξ_n hypervlak (hyperplane).

Bij een ξ_p en een ξ_q kunnen wij onderscheiden:

de doorsnijding (section) ξ_r , bestaande uit de gemeenschappelijke punten; ($r = -1$ betekent kruising)

de samenvoeging (junction) ξ_s , zijnde de kleinste lineaire uitgebreidheid die ξ_p en ξ_q beide bevat.

Men kan bewijzen dat

$$(3.5) \quad s \geq p+q-n; \quad t = p+q-s$$

waarbij oneigenlijke uitgebreidheden meegerekend worden. Hier zijn de doorsnijdingen en samenvoegingen in ξ_n voor algemene ligging:

doorsnijdingen

samenvoegingen

(3.6)

	ξ_0	ξ_1	ξ_2	ξ_3
ξ_0	x	x	x	x
ξ_1	x	x	x	ξ_2
ξ_2	x	x	ξ_0	ξ_1
ξ_3	x	ξ_0	ξ_1	ξ_2

	ξ_0	ξ_1	ξ_2	ξ_3
ξ_0	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4
ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_4
ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_4	ξ_4
ξ_3	ξ_4	ξ_4	ξ_4	ξ_4

Deze tabel kan worden geverifieerd door een eenvoudige proef. In de ξ_n van x, y, z en t beschrijft een bewegend punt een wereldlijn. Deze is een ξ_1 voor uniforme beweging. Een uniform bewegend lijn beschrijft een ξ_2 en een uniform bewegend vlak een ξ_3 . Men bewege nu twee staven of een staaf en een plaat uniform.

Bij elk toegelaten coördinatenstelsel in ξ_n behoren $\binom{n}{1} \xi_1$'s, de coördinaatassen, $\binom{n}{2} \xi_2$'s, de coördinaatvlakken en algemeen $\binom{n}{p} \xi_p$'s, de coördinaat- ξ_p 's. Iedere ξ_p in ξ_n snijdt elk der coördinaat- ξ_{n-p} 's in een punt en de ξ_p is vastgelegd door $p+1$ van die snijpunten. Elk snijpunt kan worden vastgelegd door $n-p$ getallen, en dus kan een ξ_p in ξ_n worden vastgelegd door $(p+1)(n-p)$ getallen. Evenzo bewijst men dat een ξ_p door een gegeven ξ_q in ξ_n kan worden vastgelegd door $(p-q)(n-p)$ getallen.

Wanneer in een ξ_n een ξ_p gegeven is benevens een $(n-p)$ -richting, die geen richting met de ξ_p gemeen heeft, dan kunnen we iedere figuur in ξ_n aan de volgende drie processen onderwerpen:

- Snijding met $\mathbb{E}_p$: alle punten niet in $\mathbb{E}_p$ worden weggelaten. Alleen $\mathbb{E}_p$ wordt gebruikt.
- Samenlegging (reduction) met betrekking tot de $(n-p)$ -richting: alle punten die in één en dezelfde $\mathbb{E}_{n-p}$ met deze $(n-p)$ -richting liggen, worden geïdentificeerd. De figuur die ontstaat is gelegen in de $\mathbb{E}_p$ die uit $\mathbb{E}_{n-p}$ ontstaat door samenlegging. Alleen de $(n-p)$ -richting wordt gebruikt.
- Projectie op $\mathbb{E}_p$ in de $(n-p)$ -richting: door ieder punt der figuur wordt een $\mathbb{E}_{n-p}$ gebracht met deze $(n-p)$ -richting en deze $\mathbb{E}_{n-p}$ wordt tot snijding gebracht met de $\mathbb{E}_p$. De verzameling van alle snijpunten is de projectie. De $\mathbb{E}_p$ en de $(n-p)$ -richting worden gebruikt.

Een $\mathbb{E}_p$ met inwendige oriëntatie (inner orientation) is een $\mathbb{E}_p$ waarin een p -dimensionale schroefzin is gedefinieerd. Een $\mathbb{E}_p$ met uitwendige oriëntatie (outer orientation) is een $\mathbb{E}_p$ waaraan een $(n-p)$ -dimensionale schroefzin is toegevoegd ~~aan de $\mathbb{E}_p$~~ d.w.z. in een (en dus in iedere) $\mathbb{E}_{n-p}$ die geen richting met de $\mathbb{E}_p$ gemeen heeft.

II GEOMETRISCHE OBJECTEN IN $\mathbb{E}_n$

§ 4. Definities.

Een geometrisch object in $\mathbb{E}_n$ is een correspondentie tussen de toegelaten coördinatenstelsels enerzijds en de geordende stelsels van N getallen anderzijds, die aan de volgende voorwaarden voldoet:

- aan ieder toegelaten coördinatenstelsel is één en slechts één geordend stel van N getallen toegevoegd;
- indien $\mathbb{Q}_A; A=1, \dots, N$ en $\mathbb{Q}_{A'}; A'=1, \dots, N'$ corresponderen met (K) en (K') , dan zijn de $\mathbb{Q}_A$ functies van de A^k , de A'^k en de α^k .

De $\mathbb{Q}_A$ heten de kentallen (components) van het object met betrekking tot (K) . Geometrische objecten in $\mathbb{E}_n$ worden onderscheiden naar de transformatiewijze van hun kentallen.

Indien de $\mathbb{Q}_A$ lineair homogeen in de $\mathbb{Q}_A$ zijn, homogeen algebraïsch in de A^k en onafhankelijk van de α^k , dan heet het object een geometrische grootheid (quantity). De "radiusvector" $\mathbf{r}^k$ is een geometrisch object maar geen geometrische grootheid (bij de groep G_n).

§ 5. Scalaren en vectoren.

- Scalaren. Een scalar heeft één kentel, invariant bij G_n .
- Contravariante vectoren. Een contravariante vector heeft n kentallen v^k met de transformatiewijze:

$$5.1) \quad v^k = A^k_{\lambda} v^{\lambda}$$

Meetkundig beeld: pijl 1). De kentallen zijn de projecties op de assen gemeten met behulp van de maateenheden op die assen. De meegeprojecteerde pijl bepaalt het teken. In een gecentreerde $\mathbb{E}_n$ kan dit beeld worden vervangen door een punt. Aldaar is de "radiusvector" een contravariante vector en dus een geometrische grootheid. Dit is een eerste voorbeeld van twee objecten die bij G_n niet dezelfde transformatiewijze hebben maar bij een ondergroep van G_n , hier G_1 , wel.

- Covariante vectoren. Een covariante vector heeft n kentallen w_{λ} met de transformatiewijze

$$5.2) \quad w_{\lambda} = A^{\lambda}_{\mu} w_{\mu}$$

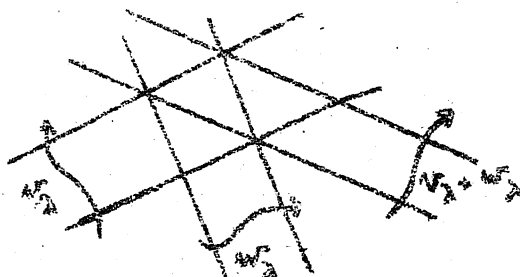
Meetkundig beeld: twee parallelle vlakken met een zin b.v. aan te geven door een niet noodzakelijk rechte pijl die door de vlakken heen steekt.

- De pijl moet vrij zwevend gedacht worden, dus bepaald op een translatie na. Bij de volgende meetkundige beelden wordt dit niet telkens gezegd.

De kentallen zijn 1 : de stukken die van de assen afgesneden worden, gemeten met de maateenheden op die assen. In een gecentreerde ξ_k kan dit beeld vervangen worden door een hypervlak. De w_λ zijn dan de bekende hypervlakcoördinaten.

Optelling van contravariante vectoren geschiedt volgens het "parallelogram van krachten". Optelling van covariante vectoren wordt geïllustreerd in fig. 1 voorstellende een doorsnede met een ξ_2 :

fig. 1



Bij vermenigvuldiging met een positieve scalar s wordt het beeld van een contravariante vector s x groter en het beeld van een covariante vector s x kleiner. Is de scalar negatief dan keert de oriëntering om.

Bij elk coördinatenstelsel hoort een stel van n contravariante vectoren e^λ en een stel van n covariante vectoren e_λ , de maatvectoren, gedefinieerd door

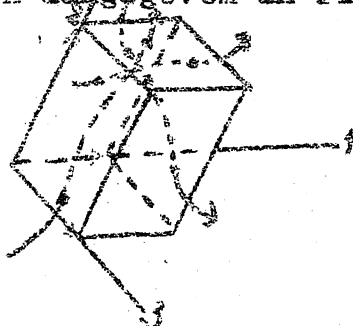
$$e^\lambda = \begin{cases} 1, & \lambda = k \\ 0, & \lambda \neq k \end{cases}$$

5.3)

$$e_\lambda = \begin{cases} 1, & \lambda = k \\ 0, & \lambda \neq k \end{cases}$$

Hier zijn e^λ en e_λ de kernen. De in deze kernen optredende indices transformeren niet mee en heten dode indices (dead indices). Voor $n = 3$ zijn de maatvectoren aangegeven in fig. 2:

fig. 2



De contravariante passen precies tussen de vlakken van de gelijknamige covariante. De kentallen van e^λ en e_λ t.o. van een ander coördinatenstelsel zijn

$$e^{\lambda'} = A^{\lambda'}_{\lambda} e^\lambda$$

5.4)

$$e_{\lambda'} = A_{\lambda'}^{\lambda} e_{\lambda}$$

Deze kentallen zijn natuurlijk niet langer 1 of 0. Men ziet hier duidelijk dat de dode indices niet meetransformeren.

De combinatie $v^\lambda w_\lambda$ is een invariant

$$5.5) \quad v^{\lambda'} w_{\lambda'} = v^\lambda A^{\lambda'}_{\lambda} A_{\lambda'}^{\mu} w_\mu = v^\lambda w_\lambda$$

en heet de overschuiving (transvection) van v^λ en w_λ . Voor $v^\lambda w_\lambda = 0$ ligt v^λ in de $(n-1)$ -richting van w_λ en voor $v^\lambda w_\lambda = \pm 1$ past v^λ precies tussen de hypervlakken van w_λ .

Bij elk stel van n lineair onafhankelijke contravariante vectoren v^k behoort één en slechts één stel van n lineair onafhankelijke covariante vectoren w_k , zo dat

5.6)

$$v^k w_\lambda = \delta_\lambda^k = \begin{cases} 1, & k=\lambda \\ 0, & k \neq \lambda. \end{cases}$$

Het symbool δ_λ^k voorstellende n^2 scalaires heet het Kronecker symbool. De indices van het Kronecker symbool zijn dood en het is alleen op grond van historische overwegingen dat hier van de consequente schrijfwijze δ wordt afgeweken. v^k en w_k heten t.o. van elkaar reciprook. Blijkbaar is ieder stel maatvectoren behorende bij enig coördinatenstelsel een dergelijk reciprook stel.

Co- en contravariante maatvectoren kunnen worden gebruikt om de kentallen van een vector te bepalen of omgekeerd de vector uit zijn kentallen af te leiden. Van de vector v^k kan men b.v. n scalaires vormen door overschuiving met de e_λ^k :

5.7)

$$v^k = v^\lambda e_\lambda^k.$$

Deze scalaires zijn numeriek gelijk aan de v^k . Maar indien de vergelijking op andere coördinaten geschreven wordt

5.8)

$$v^k = v^{\lambda'} e_{\lambda'}^k.$$

transformeren de v^k wel maar de $v^{\lambda'}$ niet. Men mag dus niet schrijven $v^{\lambda'} = v^k$ maar schrijft daarvoor

5.9)

$$v^k \neq v^{\lambda'}.$$

waarin het teken $\neq$ betekent dat alleen wordt beweerd, dat de vergelijking geldt t.o. van dat coördinatenstelsel of die coördinatenstelsels die in de vergelijking zelf gebruikt zijn. Vergelijkingen met $\neq$ behoeven dus niet invariant te zijn. Een vergelijking in kentallen, b.v. $v^k = v^{\lambda'}$ hoeft niet met $\neq$ geschreven te worden omdat het hier vanzelf duidelijk is, dat er alleen maar iets t.o. van een bepaald coördinatenstelsel wordt beweerd.

In (2.16) gaat men van een levende index tot een dode index over. Dit proces heet het smoren van een index (to strangle). De gesmoorde index moet hetzij door andere plaatsing als in (5.9) hetzij op andere wijze (zie later) duidelijk als dode index worden gemerkt.

Omgekeerd kan men v^k construeren uit de scalaires $v^{\lambda'}$ met behulp van de vergelijking

5.10)

$$v^k = v^{\lambda'} e_{\lambda'}^k$$

of in algemene coördinaten

5.11)

$$v^k = v^{\lambda'} e_{\lambda'}^k.$$

(5.7) en (5.10) stellen numeriek precies hetzelfde voor maar meetkundig geeft (5.7) aan hoe de kentallen verkregen worden door projectie en (5.10) hoe de vector wordt samengesteld uit zijn componenten. Inderdaad zijn dan ook (5.8) en (5.11), die meetkundig hetzelfde voorstellen als (5.7) en (5.10), volstrekt niet meer numeriek gelijk.

Uit (5.1), (5.8), (5.11) en de corresponderende vergelijkingen voor covariante vectoren volgt

5.12)

$$e_{\lambda'}^k = e_\lambda^k = A_\lambda^{\lambda'} e_{\lambda'}^k; \quad e_{\lambda'}^k = e_\lambda^k = A_\lambda^{\lambda'} e_{\lambda'}^k.$$

Wij geven een voorbeeld voor $n = 3$. Zij de transformatie van x^k in $x^{\lambda'}$

5.13)

$$x^{\lambda'} = A_{\lambda'}^k x^k: \quad \begin{aligned} x^{1'} &= x^1 - x^2 - x^3 \\ x^{2'} &= 2x^1 - 2x^2 - x^3 \\ x^{3'} &= -x^1 + 2x^2 + x^3 \end{aligned} \quad A_{\lambda'}^k: \quad \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1' & 1 & -1 & -1 \\ 2' & 2 & -2 & -1 \\ 3' & -1 & 2 & 1 \end{array} \quad \det(A_{\lambda'}^k) = 1$$

dan vindt men door middel van de regel in § 1 voor de constructie van $A_{\kappa'}^{\kappa}$

$$5.14) \quad x^{\kappa} = A_{\kappa'}^{\kappa} x^{\kappa'}$$

$$\begin{aligned} x^1 &= x^{1'} + x^{2'} + x^{3'} \\ x^2 &= x^{1'} + x^{3'} \\ x^3 &= -2x^{1'} + x^{2'} \end{aligned}$$

$$A_{\kappa'}^{\kappa} : \begin{array}{c|ccc} & 1' & 2' & 3' \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}$$

en bijgevolg voor de overgang van de maatvectoren van (κ) tot de maatvectoren van (κ')

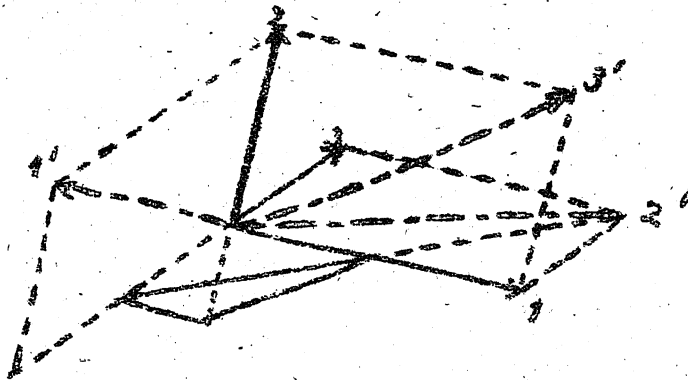
$$e_{\lambda'}^{\kappa} = A_{\lambda}^{\kappa} e_{\lambda}^{\kappa}$$

$$5.15) \quad \begin{aligned} e_1^{\kappa} &= e_1^{\kappa} - 2e_2^{\kappa} \\ e_2^{\kappa} &= e_1^{\kappa} + e_2^{\kappa} + \frac{1}{3}e_3^{\kappa} \\ e_3^{\kappa} &= e_1^{\kappa} + e_2^{\kappa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{1'}^{\kappa} &= e_1^{\kappa} - e_2^{\kappa} - e_3^{\kappa} \\ e_{2'}^{\kappa} &= 2e_1^{\kappa} - 2e_2^{\kappa} - e_3^{\kappa} \\ e_{3'}^{\kappa} &= -e_1^{\kappa} + 2e_2^{\kappa} + e_3^{\kappa} \end{aligned}$$

Dit kan worden geverifieerd in fig 3:

fig. 3



Het vlak door het uiteinde van e_2^{κ} evenwijdig aan e_1^{κ} en e_3^{κ} heeft de vergelijking $2x^1 - 2x^2 + x^3 = 1$

en dit vlak snijdt van de assen de stukken $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, -1 af. Inderdaad zijn dus 2, -2, -1 de kentallen van $e_{\lambda'}$ t.o. (κ) . Omgekeerd is:

$$5.16) \quad \begin{aligned} e_{\lambda}^{\kappa} &= A_{\lambda'}^{\kappa} e_{\lambda'}^{\kappa} \\ a) \quad \begin{cases} e_1^{\kappa} &= e_{1'}^{\kappa} + 2e_{2'}^{\kappa} - e_{3'}^{\kappa} \\ e_2^{\kappa} &= -e_{1'}^{\kappa} - 2e_{2'}^{\kappa} + 2e_{3'}^{\kappa} \\ e_3^{\kappa} &= -e_{1'}^{\kappa} - e_{2'}^{\kappa} + e_{3'}^{\kappa} \end{cases} \\ b) \quad \begin{cases} e_{1'}^{\kappa} &= e_1^{\kappa} - e_2^{\kappa} - e_3^{\kappa} \\ e_{2'}^{\kappa} &= 2e_1^{\kappa} - 2e_2^{\kappa} - e_3^{\kappa} \\ e_{3'}^{\kappa} &= -e_1^{\kappa} + 2e_2^{\kappa} + e_3^{\kappa} \end{cases} \end{aligned}$$

Men lette er op dat de matrix van (5.15 b) dezelfde is als die van (5.13) maar die van (5.15 a) de gespiegelde t.o. van de hoofddiagonaal van die van (5.14). Dit komt doordat in (5.14) de overschuiving aangrijpt aan de onderste index van $A_{\kappa'}^{\kappa}$ en in (5.15 a) aan de bovenste index. Hetzelfde geldt voor (5.13) en (5.16 a)

6. Affinoren en affinordichtheden.

Wij beschouwen nu algemene grootheden met n kentallen

met de transformatiewijze

$$(6.1) \quad P^{\lambda_1 \dots \lambda_p}_{\lambda_1' \dots \lambda_p'} = \alpha A^{\lambda_1 \dots \lambda_p}_{\lambda_1' \dots \lambda_p'} P^{\lambda_1 \dots \lambda_p}_{\lambda_1' \dots \lambda_p'} \quad (1)$$

waarin α een product is van een macht van Δ en een macht van $|\Delta|$. Dit is het meest algemene geval. De grootheid heeft algemeen een affinordichtheid, p is de contravariante valentie, q de covariante valentie. De grootheid heet contravariant voor $q = 0$, covariant voor $p = 0$ en gemengd (mixed) voor $p \neq 0$, $q \neq 0$.

De volgende gevallen komen het meest voor:

- (6.2) a) $\alpha = 1$ Affinor; meestal geschreven met latijnse kernletter
 b) $\alpha = |\Delta|^{-p}$ (gewone) affinordichtheid met gewicht p)
 c) $\alpha = \Delta^{-p}$ affinor- Δ -dichtheid met gewicht p)
 (meestal geschreven met gothische (of griekse)
 kernletter, voor Δ -dichtheden met een Δ erboven)
 d) $\alpha = 0 |\Delta|^{-p}$ Δ -affinor; meestal geschreven met latijnse kern-
 letter met een Δ erboven.

Scalairen en vectoren zijn bijzondere gevallen van affinoren met $p=0$, $q=0$; $p=1$, $q=0$ en $p=0$, $q=1$. Heeft een affinor een valentie > 1 dan bestaan er intermediaire kentallen, dat zijn kentallen behorende bij meer dan een assenstelsel, b.v.

$$(6.3) \quad P^{\lambda_1 \dots \lambda_p}_{\lambda_1' \dots \lambda_p'} = A^{\lambda_1 \dots \lambda_p}_{\lambda_1' \dots \lambda_p'} P^{\lambda_1 \dots \lambda_p}_{\lambda_1' \dots \lambda_p'} = A^{\lambda_1 \dots \lambda_p}_{\lambda_1' \dots \lambda_p'} P^{\lambda_1 \dots \lambda_p}_{\lambda_1' \dots \lambda_p'}$$

Bij dichtheden moet men alvorens dergelijke kentallen te kunnen vormen eerst aan iedere index een gewicht toekennen, zo, dat de vsm dezer gewichten gelijk wordt aan het gewicht van de grootheid.

De plaats van de indices is wezenlijk. Men mag dus niet tijdens een onderzoek nu eens $P^{\lambda_1 \dots \lambda_p}_{\lambda_1' \dots \lambda_p'}$ schrijven en dan weer $P^{\lambda_1' \dots \lambda_p'}_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$. In het algemeen worden indices nooit boven elkaar geschreven omdat dan verwarring kan ontstaan o.a. bij het later te definiëren proces van op en neerkhalen.

Een gemengde affinor van de valentie 2 stelt een lineaire transformatie van contravariante vectoren en ook een van covariante vectoren voor:

$$(6.4) \quad a) \quad v^{\lambda} = P^{\lambda}_{\lambda'} v^{\lambda'}$$

$$b) \quad w_{\lambda} = P^{\lambda}_{\lambda'} w_{\lambda'}$$

Voor het geval dat $\Delta = 1$ ($P^{\lambda}_{\lambda'} = \delta^{\lambda}_{\lambda'}$) schrijft men de omkering

$$(6.5) \quad a) \quad v^{\lambda} = \tilde{P}^{\lambda}_{\lambda'} v^{\lambda'}$$

$$b) \quad w_{\lambda} = \tilde{P}^{\lambda}_{\lambda'} w_{\lambda'}$$

en noemt $\tilde{P}^{\lambda}_{\lambda'}$ de omkering (inverse) van $P^{\lambda}_{\lambda'}$. Men vormt $\tilde{P}^{\lambda}_{\lambda'}$ uit $P^{\lambda}_{\lambda'}$ precies als $A^{\lambda}_{\lambda'}$ uit $A^{\lambda}_{\lambda'}$ in § 1. Dus is b.v. $\tilde{P}^{\lambda}_{\lambda'}$ de minor van $P^{\lambda}_{\lambda'}$ in de matrix van $P^{\lambda}_{\lambda'}$, gedeeld door de determinant van die matrix.

De affinor behorende bij de identieke transformatie heet de eenheidsaffinor (unit affinor) en wordt geschreven A^{λ}_{λ} 2)

$$(6.6) \quad v^{\lambda} = A^{\lambda}_{\lambda} v^{\lambda}$$

1) voor het gemak wordt de kernletter A niet herhaald, A^{λ}_{λ} staat dus voor $A^{\lambda}_{\lambda} A^{\lambda}_{\lambda}$

2) Hier wordt met opzet afgeweken van de regel om geen indices boven elkaar te plaatsen. Het kan juist hier geen kwaad en vereenvoudigt de formules belangrijk.

Blijkbaar is A_{λ}^{μ} gelijk 1 voor $\mu=\lambda$ en 0 voor $\mu \neq \lambda$, dus

$$6.7) \quad A_{\lambda}^{\mu} = \delta_{\lambda}^{\mu} = \delta_{\lambda}^{\mu} = \delta_{\lambda}^{\mu} = \delta_{\lambda}^{\mu}.$$

Transformeert men in (6.6) alleen de index λ dan komt er

$$6.8) \quad \tau^{\mu} = A_{\lambda}^{\mu} \tau^{\lambda}$$

en daarnit volgt, dat de A_{λ}^{μ} geïntroduceerd in (1.1) niet anders zijn als intermediaire kentallen van de eenheidsaffinor.

Blijkbaar is

$$6.9) \quad P_{\lambda}^{\mu} P_{\mu}^{\nu} = A_{\lambda}^{\nu}$$

Dit een covariante of contravariante affinor $P_{\lambda}^{\mu}, Q^{\mu\lambda}$ van de valentie 2 kan men, voor het geval dat de matrix de rang n heeft eveneens omkeren $P_{\lambda}^{\mu} Q^{\mu\lambda}$ vormen, steeds volgens dezelfde regel van § 1. ($P^{\lambda\lambda} =$ minor van $P_{\lambda\lambda}$ gedeeld door determinant) en dan geldt

$$6.10) \quad P^{\lambda\lambda} P_{\lambda\mu} = A_{\mu}^{\lambda}; \quad Q_{\mu\lambda} Q^{\lambda\mu} = A_{\mu}^{\mu}.$$

§ 7. Invariante processen.

a. Optelling, alleen voor affinordichtheden met dezelfde valenties en dezelfde α , b.v.

$$7.1) \quad P^{\lambda\lambda} = Q^{\lambda\lambda} + R^{\lambda\lambda}.$$

b. Vermenigvuldigen, b.v.

$$7.2) \quad S_{\lambda\lambda}^{\mu\mu} = P_{\lambda\lambda}^{\mu\mu} Q^{\mu\mu} R^{\mu\mu}.$$

Men lette er op dat bijvoorbeeld

$$7.3) \quad P^{\lambda\lambda} Q^{\lambda\lambda} \neq Q^{\lambda\lambda} P^{\lambda\lambda}.$$

Er is dus niet zoets als commutativiteit.

Een affinor is meestal geen product van vectoren maar altijd een vorm van producten van vectoren, b.v.

$$7.4) \quad P^{\lambda\lambda} = (P^{\mu\mu} e_{\mu}^{\lambda} e_{\mu}^{\lambda}) = e_{\mu}^{\lambda} e_{\mu}^{\lambda}.$$

c. Overschuiving (transvection), b.v.

$$7.5) \quad R^{\lambda\mu} = P_{\lambda\mu}^{\lambda\mu} Q^{\lambda\mu}$$

d. Vouwing (contraction, Faltung, Verjüngung)

$$7.6) \quad Q^{\lambda\lambda} = P_{\lambda}^{\lambda\lambda}$$

e. Isomeervorming (isomer) b.v.

$$7.7) \quad Q^{\lambda\lambda\lambda} = P_{\lambda\lambda\lambda}^{\lambda\lambda\lambda}$$

f. Menging (mixing), toegepast op een bepaald aantal p gelijkstardige indices. Vorm de p isomeren door verwisseling, tel op en deel door $p!$. Teken () met uitschakelteken | | . B.v.

$$7.8) \quad P_{\lambda}^{\lambda} (k_1 k_2 \dots k_p) = \frac{1}{p!} (P_{\lambda}^{\lambda} k_1 k_2 \dots k_p + P_{\lambda}^{\lambda} k_2 k_1 k_3 \dots k_p + \dots + P_{\lambda}^{\lambda} k_p k_1 k_2 \dots k_{p-1}).$$

Een affinor, invariant voor menging der p indices, heet symmetrisch in die indices. Een co- of contravariante affinor symmetrisch in alle indices heet tensor. 1)

1) Het woord tensor oorspronkelijk uit de elasticiteitsleer ontsproten voor een symmetrische affinor wordt veelal ook voor alle affinoren gebruikt. Het betere woord affinor, dat aan de tengrondslag liggende affine groep herinnert, is van F. Jung.

g. Alternatie (alternation), precies als menging, alleen worden de oneven permutaties negatief genomen. Tekenen ϵ met uitschakeltaken. B.v.

$$P_{\lambda}^{(K)}(x) = \frac{1}{6!} P_{\lambda}^{(K)}(x) + P_{\lambda}^{(K)}(x) + P_{\lambda}^{(K)}(x) - P_{\lambda}^{(K)}(x) - P_{\lambda}^{(K)}(x) - P_{\lambda}^{(K)}(x)$$

7.9)

Een affinor invariant voor alternatie over p indices heet alternant in die indices. Een co- of contravariante affinor van valentie p , symmetrisch in alle indices, heet een p -vector $1)$. Aangezien alterneren over meer dan n indices altijd nul geeft, zijn er alleen p vectoren voor $p \leq n$

Opgave: Verifieer b.v. voor $n = 2$ of $n = 3$ dat

$$7.10) \det(P^{(K)}) = n! \epsilon^{i_1 \dots i_n} P^{i_1}_{j_1} \dots P^{i_n}_{j_n} = n! \epsilon^{i_1 \dots i_n} P^{i_1}_{j_1} \dots P^{i_n}_{j_n} = n! \epsilon^{i_1 \dots i_n} P^{i_1}_{j_1} \dots P^{i_n}_{j_n}$$

en maak duidelijk dat precies dergelijke formules gelden voor $P^{(K)}_{\lambda}$ en $P^{(K)}_{\lambda}$

h. Smoren van indices t.o. van een bepaald coördinatenstelsel. Geschiedt door overschuiving met de maatvectoren, b.v.

$$7.11) P^{(K)}_{\lambda} = P^{(K)}_{\lambda}(\mu) = P^{(K)}_{\lambda}(\mu) = P^{(K)}_{\lambda}(\mu) = P^{(K)}_{\lambda}(\mu)$$

(er ontstaan 2^2 affinoren van de valentie 2 uit een affinor van de valentie 4). De gesmoorde indices zijn dood. Zij worden boven of onder de kernletter geklatst of ook, vooral als er veel zijn, ter plaatse met $()$ of iets anders gemerkt.

Indien in een invariante vergelijking links en rechts dezelfde indices worden gesmoord, dan blijft de vergelijking invariant. Maar indien links en rechts de gesmoorde indices niet dezelfde zijn, dan blijft de vergelijking wel numeriek waar, zolang men het coördinatenstelsel niet verandert, maar de invariantie gaat verloren en het teken ϵ moet worden gebruikt. B.v.:

$$7.12) A^{(K)}_{\lambda} = A^{(K)}_{\lambda} = \epsilon_{\lambda} = A^{(K)}_{\lambda} = \delta_{\lambda} = A^{(K)}_{\lambda} = \epsilon_{\lambda}$$

i. Rangvorming. De rang van een grootheid t.o. van een bepaald stel indices is het aantal lineair onafhankelijke grootheden dat men verkrijgt als men de andere indices smoort. (of ook indien men de andere indices achtereenvolgens al hun waarden laat doorlopen). De rang is een arithmetische invariant voor alle toegelaten coördinatentransformaties. Uit de definitie volgt, dat de rang t.o. v. zekere indices gelijk is aan de rang t.o. v. alle andere indices en dat de rang t.o. v. alle indices 1 dus triviaal is.

Een affinor of affinordichtheid van de valentie twee heeft dus maar één rang en deze is gelijk aan de rang van zijn matrix.

De rang van een grootheid t.o. v. een index μ dan is het aantal lineair onafhankelijke vectoren dat ontstaat bij het smoren van de andere indices juist r . De verzameling van alle vectoren die van deze lineaire afhangen met scalaire coëfficiënten heet het μ -gebied (domain) van de grootheid. Zijn deze vectoren contravariant dan is er een kleinste μ waar ze alle inliggen, zijn ze covariant, dan is er een grootste

ϵ_{μ} waar ze alle doorgaan. Deze ϵ_{μ} heet de drager (support) van het μ -gebied.

Voorbeeld. Gegeven een ϵ_{μ} en een ϵ_{ν} die geen richting gemeen hebben in ϵ_{μ} , $\mu + \nu = n$. Gevraagd een affinor $B^{(K)}_{\lambda}$ van de rang p , wiens K -gebied als drager de ϵ_{μ} en wiens λ -gebied als drager de ϵ_{ν} heeft en evenzo een affinor $C^{(K)}_{\lambda}$ waarbij het net andersom is. Verder wordt geëist, dat

1) sommige auteurs gebruiken de naam antisymmetrische tensor.

$$7.13) \quad a) \quad E_{\lambda}^{\kappa} E_{\mu}^{\lambda} = E_{\mu}^{\kappa}$$

$$b) \quad C_{\lambda}^{\mu} C_{\mu}^{\kappa} = C_{\lambda}^{\kappa}$$

Wordt het coördinatensysteem zo gelegd, dat $\epsilon_{\lambda}^{\kappa}$ juist E_{λ}^{κ} opspannen en $\epsilon_{\lambda}^{\kappa}$ juist E_{λ}^{κ} , dan spannen omgekeerd $\epsilon_{\lambda}^{\kappa}$ juist E_{λ}^{κ} op en $\epsilon_{\lambda}^{\kappa}$ juist E_{λ}^{κ} en men vindt

$$7.14) \quad a) \quad B_{\lambda}^{\kappa} = \epsilon_{\lambda}^{\alpha} \epsilon_{\alpha}^{\kappa} ; \quad \delta = (1, \dots, 1)$$

$$b) \quad C_{\lambda}^{\kappa} = \epsilon_{\lambda}^{\alpha} \epsilon_{\alpha}^{\kappa} ; \quad \delta = (1, \dots, n)$$

en daaruit volgt

$$7.15) \quad a) \quad A_{\lambda}^{\kappa} = B_{\lambda}^{\kappa} + C_{\lambda}^{\kappa}$$

$$b) \quad B_{\lambda}^{\kappa} = \delta_{\lambda}^{\kappa} ; \quad C_{\lambda}^{\kappa} = 0$$

$$c) \quad B_{\lambda}^{\kappa} C_{\lambda}^{\mu} = 0 ; \quad B_{\lambda}^{\mu} C_{\mu}^{\kappa} = 0$$

B_{λ}^{κ} en C_{λ}^{κ} kunnen dienen om een vector v^{κ} te ontbinden in twee componenten in E_{λ} en in E_{μ} , of een vector w_{λ} in twee componenten door E_{λ} en door E_{μ} :

$$7.16) \quad v^{\kappa} = B_{\lambda}^{\kappa} v^{\lambda} + C_{\lambda}^{\kappa} v^{\lambda}$$

$$w_{\lambda} = B_{\lambda}^{\kappa} w_{\kappa} + C_{\lambda}^{\kappa} w_{\kappa}$$

§ 8. Tensoren.

Het aantal onafhankelijke kentallen van een tensor van de valentie p is $\binom{n+p-1}{p}$.

Het geometrische beeld van de tensor $w^{\lambda_1 \dots \lambda_p} = w^{\lambda_1 \dots \lambda_p}$ is in een gecentreerde E_n de X_{n-p} (hyperoppervlak) met de vergelijking

$$8.1) \quad w^{\lambda_1 \dots \lambda_p} x^{\lambda_1} \dots x^{\lambda_p} = 1$$

in punteoördinaten. De rang r van een tensor is natuurlijk gelijk t.o.v. alle indices. Er is dus slechts één drager, een E_{n-r} met de vergelijkingen

$$8.2) \quad w^{\lambda_1 \dots \lambda_p} x^{\lambda_1} \dots x^{\lambda_p} = 0$$

De X_{n-r} (8.1) is een cylinder bestaande uit $\infty^{r-1} E_{n-r}$'s alle met deze zelfde $(n-r)$ -richting. De kegel

$$8.3) \quad w^{\lambda_1 \dots \lambda_p} x^{\lambda_1} \dots x^{\lambda_p} = 0$$

bestaat uit $\infty^{r-2} E_{n-r}$'s die alle de E_{n-r} (8.2) bevatten.

Het geometrisch beeld van de tensor $v^{k_1 \dots k_p} = v^{(k_1 \dots k_p)}$ is in een gecentreerde E_n de X_{n-p} met de vergelijking

$$8.4) \quad v^{k_1 \dots k_p} u_{k_1} \dots u_{k_p} = 1$$

in hypervlakcoördinaten u_{λ} . Men kan hier soortgelijke beschouwingen opstellen.

Voor de physica is vooral de tensor van de valentie 2 belangrijk. Het geometrisch beeld van $P_{\lambda\kappa}$ is het tweedegraads hyperoppervlak:

$$8.5) \quad P_{\lambda\kappa} x^{\lambda} x^{\kappa} = 1$$

Er bestaat een merkwaardige stelling, die zegt, dat men voor een reële tensor van de rang r een reëel coördinatenstelsel (X^i) steeds op ∞

veel wijzen zo kan kiezen, dat

$$8.6) \quad P_{11} = -1, \dots, P_{22} = -1, P_{33} = +1, \dots, P_{rr} = +1, P_{r+1, r+1} = 0, \dots, P_{nn} = 0$$

Daarbij is ϵ een invariant die men de index van P_{rr} noemt. De volgorde $- \dots + \dots +$ heet de signatuur. Men zegt dat de signatuur negatief is voor ϵ oneven en positief voor ϵ even. Is $r = n$ dan heeft de omkering t.o. van (K') de kentallen

$$8.7) \quad \bar{P}^{11} = -1, \dots, \bar{P}^{rr} = -1, \bar{P}^{s+1, s+1} = +1, \dots, \bar{P}^{nn} = +1$$

en dus dezelfde index en dezelfde signatuur. In dit geval noemt men

$\bar{P}^{rr}$ en $\bar{P}_{rr}$ positief definitief voor $\epsilon = 0$, negatief definitief voor $\epsilon = r$ en indefinitief voor $0 < \epsilon < n$. Het geometrisch beeld van $\bar{P}_{rr}$ is hetzelfde hyperoppervlak (8.5) welks vergelijkingen in hypervlakcoördinaten luiden

$$8.8) \quad \bar{P}^{rr} x_r x_r = 1$$

Voor $n = 3$ voert dit alles tot het bekende proces van het beschrijven van een tweedegraadsoppervlak ten opzichte van onderling toegevoegde coördinaatassen door het middelpunt.

De stelling kan ook in een andere vorm worden uitgesproken. Is r de rang van de reële tensor P^{rr} dan bestaat er altijd tenminste één reële affinor Q^{rr} , zo dat de niet verdwijnende kentallen van

$$8.9) \quad P^{rr} = Q^{rr} P^{rr} Q^{rr}$$

zijn

$$8.10) \quad P^{11} = -1, \dots, P^{ss} = -1, P^{s+1, s+1} = +1, \dots, P^{22} = +1, P^{r+1, r+1} = 0, \dots, P^{nn} = 0$$

§ 9. p- Vectoren.

Het aantal onafhankelijke kentallen van een p-vector is $\binom{n}{p}$. Een n-vector heeft dus één onafhankelijk kentall b.v. $v^{1\dots n}$. Maar $v^{1\dots n}$ is niet invariant en een n-vector is dus geen scalar. Niet iedere p-vector kan worden geschreven als het alternerend product van p vectoren

$$9.1) \quad v^{k_1 \dots k_p} = p! \, v_1^{[k_1} \dots v_p^{k_p]}$$

De n.e.v. voorwaarde hiervoor is dat

$$9.2) \quad v_1^{[k_1} \dots v_p^{k_p} v_{p+1}^{k_{p+1}} \dots v_n^{k_n]} = 0$$

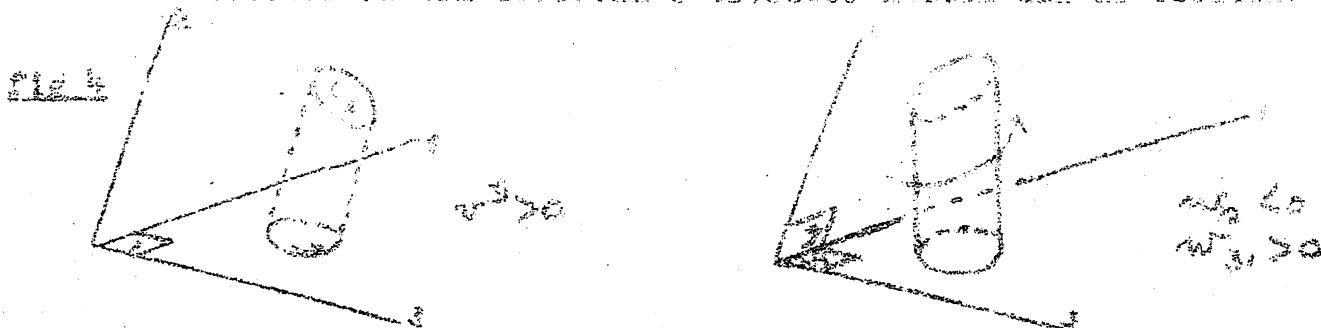
Is deze voorwaarde vervuld dan heet de p-vector enkelvoudig en er geldt een vergelijking van de vorm (9.1) maar de factoren zijn natuurlijk niet eenduidig bepaald. Wat wel bepaald is, is de $\mathcal{E}_p$ (door 0), die door deze vectoren wordt opgespannen en de inhoud van het door deze vectoren in $\mathcal{E}_n$ bepaalde parallellepipedum. Als beeld van de p-vector kan men dus nemen een deel van een $\mathcal{E}_p$ met een p-dimensionale schroefzin die door de volgorde $v_1^k, \dots, v_p^k$ wordt vastgelegd. De kentallen zijn de projecties van dit $\mathcal{E}_p$ -deel op de coördinaten $\mathcal{E}_p^k$, gemeten met de parallelotopen der maatvectoren en b.v. $v_1^k \dots v_p^k$ is positief wanneer de meegeprojecteerde schroefzin correspondeert met de schroefzin vastgelegd door $v_1^k, \dots, v_p^k$ in deze volgorde.

Een enkelvoudige covariante p-vector kan geschreven worden

$$9.3) \quad w_1 \dots w_p = p! \, w_1^{[1} \dots w_p^{p]}$$

en nu leggen de vectoren $w_1, \dots, w_p$ vast een $\mathcal{E}_{n-p}$ door 0 en een cylinder welks (n-1)-dimensionale begrenzing bestaat uit $\infty^{n-1} \mathcal{E}_{n-p}$, alle evenwijdig met de $\mathcal{E}_{n-p}$ door 0 en waaraan een uitwendige schroefzin is toegevoegd bepaald door de volgorde $w_1, \dots, w_p$. De doorsnede van deze cylinder met de coördinaten $\mathcal{E}_p^k$, gemeten met de parallelotopen der maatvectoren zijn de kentallen en b.v. $w_1^k \dots w_p^k$ is positief indien de schroefzin om de buis correspondeert met de schroefzin vastgelegd door $w_1^k, \dots, w_p^k$ in deze volgorde.

Men make zich deze dingen duidelijk voor $n = 3$ en $p = 2$. Een contravariante bivector en een covariante bivector hebben dan de beeldent



Een n -vector is natuurlijk altijd enkelvoudig. Maar men kan bewijzen, dat een $(n-1)$ -vector ook altijd enkelvoudig is. In $\mathbb{R}_3$ bestaan dus alleen enkelvoudige p -vectoren. Een niet enkelvoudige p -vector kan altijd geschreven worden als een som van enkelvoudige p -vectoren b.v.

$$9.4) \quad v_{\mu_1} \dots v_{\mu_p} = v_{\mu_1} \dots v_{\mu_p} \epsilon^{\mu_1} \dots \epsilon^{\mu_p}$$

Men noemt dit een decompositie in bladen wanneer het aantal bladen zo klein mogelijk is. Dit aantal is natuurlijk voor elke gegeven p -vector een arithmetische invariant. Voor $p \geq 2$ en $n-2$ is er van deze invariant weinig bekend maar voor $p = 2$ en $p = n-2$ is het kleinste aantal bladen precies gelijk aan de rang gedeeld door 2. We bewijzen dit voor $p=2$, $n=4$, het geval dat in de relativiteitstheorie optreedt.

$$9.5) \quad F^{[\lambda\mu} F^{\nu\sigma]} \neq 0,$$

dan betekent dit dat

$$9.6) \quad F^{12} F^{34} + F^{23} F^{14} + F^{31} F^{24} \neq 0,$$

of wat hetzelfde is

$$9.7) \quad F^{[\lambda\mu} F^{\nu\sigma]} = 0.$$

Men neme nu een enkelvoudige bivector $F^{\mu\nu}$ die voldoet aan de betrekkingen

$$9.8) \quad a) \quad F^{[\lambda\mu} F^{\nu\sigma]} \neq 0$$

$$b) \quad F^{[\lambda\mu} F^{\nu\sigma]} = 0$$

en trachte $F^{\mu\nu}$ te ontbinden in $\alpha F^{\mu\nu}$ en een andere enkelvoudige bivector $F^{\mu\nu}$. Dan moet gelden

$$9.10) \quad F^{[\lambda\mu} F^{\nu\sigma]} - 2\alpha F^{[\lambda\mu} F^{\nu\sigma]} = 0$$

en dit is één vergelijking waaruit α kan worden opgelost. De rang r van $F^{\mu\nu}$ kan alleen 2 of 4 zijn omdat een alternerende (antisymmetrische) determinant met een oneven aantal rijen en kolommen altijd nul is en we vinden dus voor $r = 4$ twee bladen (niet eenduidig bepaald) en voor $r = 2$ slechts één blad.

Uit het feit dat het minimum aantal bladen van een bivector van de rang r juist $\frac{1}{2}r$ is, volgt de merkwaardige stelling, dat het coördinatenstelsel bij een reële bivector $F^{\mu\nu}$ steeds reëel zo gekozen kan worden, dat de niet verdwijnende kentallen $F^{\mu\nu}$ zijn

$$9.11) \quad F^{1'2'} = 1, \quad F^{3'4'} = 1, \dots, \quad F^{(2r-1)'/2r'} = 1$$

Deze stelling kan ook in een andere vorm worden uitgesproken. Is $F^{\mu\nu}$ reëel, dan bestaat er steeds tenminste één reële affinor $Q^{\mu\nu}$ zo dat

$$9.12) \quad F^{\mu\nu} = Q^{\mu\kappa} F^{\kappa\lambda} Q^{\lambda\nu}$$

de niet verdwijnende kentallen

$$9.13) \quad F^{1'2'} = 1, \quad F^{3'4'} = 1, \dots, \quad F^{(2r-1)'/2r'} = 1$$

heeft.

Een n -vector heeft slechts één kental en twee contravariante of twee covariante n -vectoren zijn dus altijd gelijk op een scalaire factor na. Het beeld van een n -vector is een n -dimensionaal volume

met een schroefzin en het kental is dit volume gedeeld door het volume van het parallelotoon aller maatvectoren. Het kental is positief als de schroefzin dezelfde is als die van $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ in deze volgorde. Het beeld van een covariante n-vector is precies hetzelfde maar nu is het kental 1/het volume.

Het ene kental van $v^{k_1 \dots k_n}$ transformeert zich als volgt (verg. (7.10))

$$9.14) \quad v^{k_1 \dots k_n} = A^{k_1}_{i_1} \dots A^{k_n}_{i_n} v^{i_1 \dots i_n} = n! \begin{vmatrix} A^{k_1}_{i_1} & \dots & A^{k_n}_{i_n} \end{vmatrix} v^{i_1 \dots i_n} = \Delta v^{i_1 \dots i_n}$$

en voor $w_{k_1 \dots k_n}$ geldt

$$9.15) \quad w_{k_1 \dots k_n} = \Delta^{-1} w_{i_1 \dots i_n}$$

Volgens onze definitie kan dus $w^{k_1 \dots k_n}$ ook worden opgevat als het kental van een scalaire Δ -dichtheid van het gewicht -1 en $w_{k_1 \dots k_n}$ als het kental van een dito dichtheid van het gewicht +1. Op de constructie dezer dichtheden komen wij nog terug.

Bij elk coördinatenstelsel (K) behoren voor elke waarde van p juist $\binom{n}{p}$ contravariante en $\binom{n}{p}$ covariante enkelvoudige p-vectoren, b.v. $\vec{e}^{k_1 \dots k_p}, \dots, \vec{e}^{k_{p+1} \dots k_n}$ de zogenaamde maat-p-vectoren. De twee n-vectoren worden geschreven

$$9.16) \quad \begin{aligned} \sum_{(K)} \vec{e}^{k_1 \dots k_n} &\stackrel{\text{def}}{=} n! \begin{bmatrix} \vec{e}^{k_1} & \dots & \vec{e}^{k_n} \end{bmatrix}, \text{ dus } \sum_{(K)} \vec{e}^{k_1 \dots k_n} = +1 \\ \sum_{(K)} w_{k_1 \dots k_n} &\stackrel{\text{def}}{=} n! \begin{bmatrix} w_{k_1} & \dots & w_{k_n} \end{bmatrix}, \text{ dus } \sum_{(K)} w_{k_1 \dots k_n} = +1, \end{aligned}$$

Deze voegen aan elke contravariante (n-p)-vector één covariante p-vector toe en omgekeerd:

$$9.17) \quad \begin{aligned} w_{k_1 \dots k_p} &= \frac{1}{(n-p)!} \sum_{(K)} \vec{e}_{k_1 \dots k_p} \vec{e}^{k_{p+1} \dots k_n} v^{k_{p+1} \dots k_n} \\ v^{k_{p+1} \dots k_n} &= \frac{1}{p!} w_{k_1 \dots k_p} \sum_{(K)} \vec{e}^{k_1 \dots k_p} \vec{e}_{k_{p+1} \dots k_n} \end{aligned}$$

Beide vergelijkingen drukken uit dat

$$9.18) \quad w_{k_1 \dots k_p} = v^{k_{p+1} \dots k_n}$$

indien $\mu_1, \dots, \mu_n$ een even permutatie van $1, \dots, n$ voorstelt. Deze toevoeging kan worden benut om aan te tonen, dat een (n-2)-vector altijd kan worden ontbonden in ten hoogste $\frac{1}{2}n$ bladen indien dit voor een bi-vector al bewezen is.

§ 10. Dichtheden (densities)

De meest belangrijke Δ -dichtheden (zie definitie (6.2)) zijn de contravariante n-vector- Δ -dichtheid $\vec{e}^{k_1 \dots k_n}$ van het gewicht +1 en de covariante n-vector- Δ -dichtheid $w_{k_1 \dots k_n}$ van het gewicht -1 gedefinieerd door de voor iedere coördinatenstelsel geldige vergelijkingen.

$$10.1) \quad \vec{e}^{k_1 \dots k_n} = +1; \quad w_{k_1 \dots k_n} = +1$$

In tegenstelling tot $\vec{e}^{k_1 \dots k_n}$ en $w_{k_1 \dots k_n}$ zijn deze grootheden onafhankelijk van de keuze van het coördinatenstelsel. Zij spelen eenzelfde rol als de eenheidsaffinor A^k_i (Bewijs als oefening de invariantie van (10.1)).

De grootheden kunnen worden gebruikt om een eenéénduidig verband te leggen tussen contra- (co-)variante p-vectoren en co- (contra-) variante (n-p)-vector- Δ -dichtheden van het gewicht -1(+1):

F) Deze toevoeging is natuurlijk niet invariant, daar afhankelijk van de keuze van het coördinatenstelsel (K).

10.2)

$$\tilde{w}_{\lambda_1 \dots \lambda_p} = \frac{(-1)^{\alpha_p}}{(n-p)!} \pi_{\lambda_1 \dots \lambda_p} \kappa_{p+1} \dots \kappa_n v^{\kappa_{p+1} \dots \kappa_n}$$

$$v^{\kappa_{p+1} \dots \kappa_n} = \frac{(-1)^{-\alpha_p}}{1} \tilde{w}_{\lambda_1 \dots \lambda_p} \in \lambda_1 \dots \lambda_p \kappa_{p+1} \dots \kappa_n$$

$$\tilde{w}_{\lambda_1 \dots \lambda_p} = \frac{(-1)^{\beta_p}}{p!} w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} \in \lambda_1 \dots \lambda_p \kappa_{p+1} \dots \kappa_n$$

of in kortere vorm

$$w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} = \frac{(-1)^{\beta_p}}{(n-p)!} \pi_{\lambda_1 \dots \lambda_p} \kappa_{p+1} \dots \kappa_n \tilde{w}^{\kappa_{p+1} \dots \kappa_n}$$

10.3)

$$\tilde{w}_{\lambda_1 \dots \lambda_p} = (-1)^{\alpha_p} v^{\kappa_{p+1} \dots \kappa_n}$$

$$\tilde{w}^{\kappa_{p+1} \dots \kappa_n} = (-1)^{\beta_p} w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} \quad ; \mu_1, \dots, \mu_p = \text{elke permutatie van } 1, \dots, n.$$

We houden de keuze van α_p en β_p nog vrij om te kunnen aansluiten bij de later in te voeren identificeringen van grootheden.

Uit (10.3) ziet men duidelijk, dat de kentallen van een co-(contra)variante p -vector ook kunnen worden opgevat als kentallen van een contra-(co-)variante $(n-p)$ -vector - Δ -dichtheid van het gewicht $+1(-1)$. Er is dus tussen deze grootheden geen verschil, hun geometrische beelden zijn dezelfde en het gaat alleen maar om een andere notatie voor de kentallen. Deze kan soms gemakkelijk zijn als $n-p \leq p$, men komt dan met minder indices uit. Bijvoorbeeld voor een contravariante n -vector $v^{\kappa_1 \dots \kappa_n}$ is het gemakkelijk $\tilde{w}$ te schrijven met de definitievergelijking

10.4)

$$\tilde{w}[\kappa] = \frac{(-1)^{\alpha_0}}{n!} v^{\kappa_1 \dots \kappa_n} ; \text{evenzo } \tilde{w}(\kappa) = \frac{(-1)^{\beta_0}}{n!} w_{\kappa_1 \dots \kappa_n}$$

Men heeft dan geen indices nodig. De transformatie van $\tilde{w}$ als scalaire dichtheid met het gewicht -1 luidt

10.5)

$$\tilde{w}[\kappa'] = \Delta \tilde{w}[\kappa].$$

Aangezien er geen index meer is, moet er iets wezen om het coördinatenstelsel aan te duiden en dat wordt hier gedaan door de κ en κ' tussen haken. Waar geen misverstand mogelijk is, kan dit teken weggelaten worden.

Blijkens (10.2) corresponderen $\tilde{w}_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$ en $\pi_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$ zelf met de getallen $(-1)^{\beta_0}$ en $(-1)^{\alpha_0}$.

Volgens de definitie in § 6 verschillen gewone dichtheden van Δ -dichtheden alleen door het optreden van $|\Delta|$ in plaats van Δ in de transformatieformules. Dit scheelt natuurlijk niets bij de groep $G_{\Delta=+1}$ en bij de groep kunnen dus deze dichtheden geïdentificeerd worden. Dit is een tweede voorbeeld van identificering van grootheden als men zich tot een ondergroep van G_{Δ} beperkt.

Om de meetkundige betekenis van gewone dichtheden te verkrijgen beschouwen we de $\sqrt{\Delta}$ -scalar (zie § 6) $\tilde{p}$ de transformatiewijze

10.6)

$$\tilde{p}[\kappa'] = \frac{1}{|\Delta|} \tilde{p}[\kappa]$$

Is $\tilde{p}[\kappa] = 1$ dan heeft $\tilde{p}[\kappa']$ dezelfde waarde $|\kappa'|$ $[\kappa]$ dezelfde schroefzin hebben en de waarde -1 in het andere geval 1).

Het meetkundig beeld van $\tilde{p}$ is dus iets anders dan een schroefzin waarvan het getal 1 is toegevoegd.

Is $\tilde{w}^{\kappa_1 \dots \kappa_p}$ een Δ -dichtheid van het gewicht $+1$ dan is het duidelijk dat $\tilde{w}^{\kappa_1 \dots \kappa_p} = \sqrt{\Delta} \tilde{w}^{\kappa_1 \dots \kappa_p}$ een gewone dichtheid is. Deze grootheid heeft nu dezelfde kentallen als $\tilde{w}^{\kappa_1 \dots \kappa_p}$ ten opzichte van ieder stelsel met dezelfde schroefzin als $[\kappa]$ maar ten opzichte van de andere stelsels hebben de kentallen het het andere teken.

1) Physici spreken wel eens van pseudoscalar, maar dit woord is ook in andere zin gebruikt.

Dat wil zeggen, dat het meetkundig beeld van $\tilde{w}^{k_1 \dots k_p}$ precies hetzelfde is als dat van $\tilde{w}^{k_1 \dots k_p}$ d.w.z. een deel van een ϵ_{n-p} , maar nu niet met een uitwendige oriëntering maar wel met een inwendige (schroef er in en niet er omheen). De gewone dichtheden vormen dus inderdaad een nieuwe klasse van grootheden.

Vermenigvuldigt men een p-vector $v^{k_1 \dots k_p}$ met $\tilde{w}_p$, dan krijgt men volgens definitie (36) een $\tilde{w}$ -p-vector en hiervoor geldt hetzelfde, het meetkundig beeld blijft hetzelfde behalve dat nu de inwendige oriëntering door een uitwendige vervangen wordt. Hieruit volgt, dat een co-(contra-)variante p-vectordichtheid van het gewicht $-1(+1)$ hetzelfde is als/contr-(co-)variante $\tilde{w}$ -(n-p)-vector. Inderdaad kan men nu ook weer tussen de kentallen dezer beide groepen een eenduidig verband leggen met behulp van $\tilde{w}^{k_1 \dots k_n}$ en $\tilde{w}_{k_1 \dots k_n}$.

$$10.7) \quad \begin{aligned} w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} &= \frac{(-1)^{\delta_p}}{(n-p)!} \tilde{w}_{\lambda_1 \dots \lambda_p k_{p+1} \dots k_n} \tilde{w}^{k_{p+1} \dots k_n} \\ \tilde{w}^{k_{p+1} \dots k_n} &= \frac{(-1)^{\delta_p}}{p!} w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} \tilde{w}^{\lambda_1 \dots \lambda_p k_{p+1} \dots k_n} \\ w^{k_{p+1} \dots k_n} &= \frac{(-1)^{\delta_p}}{p!} \tilde{w}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} \tilde{w}_{\lambda_1 \dots \lambda_p k_{p+1} \dots k_n} \\ \tilde{w}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} &= \frac{(-1)^{\delta_p}}{(n-p)!} \tilde{w}_{\lambda_1 \dots \lambda_p k_{p+1} \dots k_n} w^{k_{p+1} \dots k_n} \end{aligned}$$

of in kortere vorm

$$w_{\mu_1 \dots \mu_p} = (-1)^{\delta_p} \tilde{w}^{\mu_{p+1} \dots \mu_n}$$

$$10.8) \quad w^{\mu_{p+1} \dots \mu_n} = (-1)^{\delta_p} \tilde{w}_{\mu_1 \dots \mu_p}$$

De keuze van δ_p en δ_p houden we weer aan tot later.

De gewone dichtheden zijn de dichtheden, die in de physica voorkomen, tezamen met de gewone p-vectoren. Bijv. is in de klassieke mechanica een massa per m.v. (maatvolume = volume van het parallellepipedum der affine maatvectoren) een gewone scalaire dichtheid van het gewicht +1. Een stroomdichtheid is een gewone contravariante vectordichtheid van het gewicht +1.

Wij spreken af als hoofdnotatie voor een p-vector steeds $v^{k_1 \dots k_p}$ en $\tilde{w}_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$ te beschouwen en als tweede notatie $\tilde{w}^{\lambda_{p+1} \dots \lambda_n}$ en $\tilde{w}_{k_{p+1} \dots k_n}$. Evenzo voor dichtheden $\tilde{w}^{k_1 \dots k_p}$ en $\tilde{w}_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$ als hoofdnotatie en $\tilde{w}^{\lambda_{p+1} \dots \lambda_n}$ en $\tilde{w}_{k_{p+1} \dots k_n}$ als tweede notatie.

Hier volgen twee overzichtstabellen:

getal	hoofdnotatie	tweede notatie	gewicht	oriëntering
S	scalar	$\tilde{w}^{k_1 \dots k_n}$ cov. triv. Δ -dichth.	-1	} $\pm$ -teken
		$\tilde{w}_{k_1 \dots k_n}$ contr. triv. Δ -dichth.	+1	
0.9)	contr. vector	$\tilde{w}^{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ cov. biv. Δ -dichth.	-1	inw.
	cov. vector	$\tilde{w}_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ contr. biv. Δ -dichth.	+1	uitw.
	contr. bivector	$\tilde{w}^{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ cov. vect. Δ -dichth.	-1	inw.
	cov. bivector	$\tilde{w}_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ contr. vect. Δ -dichth.	+1	uitw.
1.0)	contr. trivect.	$\tilde{w}^{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ scal. Δ -dichth.	-1	} schroef
	cov. trivect.	$\tilde{w}_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ scal. Δ -dichth.	+1	

schroef
+ getal

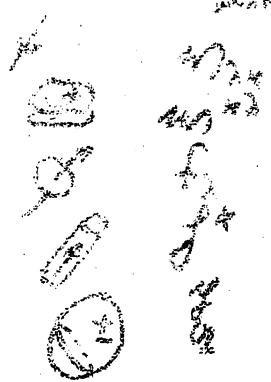
hoofdentatie

gek. breeds. notatie orient.

$\gamma^{\mu\nu}$ cov. triv. dichth.
 $\gamma_{\mu\nu}$ contr. triv. dichth.

+1 } ξ W-scalar) schroef
+1)

10.10)



cov. biv. dichth.

-1 $\tilde{\gamma}^{\mu\nu}$ contr. W-vect. uitw.

contr. biv. dichth.

+1 $\tilde{\gamma}_{\mu\nu}$ cov. W-vect. inw.

cov. vectordichth.

-1 $\tilde{\gamma}^{\mu\nu\lambda}$ contr. W-bivect. uitw.

contr. vectordichth.

+1 $\tilde{\gamma}_{\mu\nu\lambda}$ cov. W-bivect. inw.

scalar dichtheid

-1 $\tilde{\gamma}^{\mu\nu\lambda\sigma}$ contr. W-trivect.)

scalar dichtheid

+1 $\tilde{\gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma}$ cov. W-trivect.) steke

§ 11. De fundamentealtensor.

In E_n introduceren wij een reële tensor $g_{\lambda\kappa}$ met de rang n en constante kentallen. Voor de omkering $g^{\lambda\kappa}$ schrijven we kort $g^{\lambda\kappa}$

Deze tensoren heten de co- en contravariante fundamentealtensor.

Een E_n uitgerust met een fundamentealtensor heet R_n
In R_n is de uitdrukking

$$11.1) \quad + \sqrt{g_{\lambda\kappa} v^{\lambda} v^{\kappa}}$$

een invariant van v^{λ} , die de lengte van v^{λ} genoemd wordt 1). Is $g_{\lambda\kappa}$ indefiniet dan kan $g_{\lambda\kappa} v^{\lambda} v^{\kappa}$ zowel >0 als <0 als $=0$ zijn. De vectoren met lengte nul heten nulvectoren en willen de nulkegel met de vergelijking

$$11.2) \quad g_{\lambda\kappa} x^{\lambda} x^{\kappa} = 0.$$

Voor een definitieve fundamentealtensor is de nulkegel imaginair. Is de nulkegel reëel dan wordt de gecentreerde R_n verdeeld in twee delen, het $+$ -gebied waar $g_{\lambda\kappa} v^{\lambda} v^{\kappa} > 0$ en het $-$ gebied waar $g_{\lambda\kappa} v^{\lambda} v^{\kappa} < 0$

Twee vectoren u^{λ} en v^{λ} waarvoor geldt

$$11.3) \quad g_{\lambda\kappa} u^{\lambda} v^{\kappa} = 0$$

heten onderling loodrecht. Nulvectoren zijn dus de enige vectoren die op zichzelf loodrecht staan. Naar aanleiding van deze definitie kan voor twee vectoren, die beide in het $+$ -gebied of beide in het $-$ gebied liggen, de ingesloten hoek worden gedefinieerd.

Gebruik makend van de stelling in § 8 kan het coördinatenstelsel zo gelegd worden, dat de niet verdwijnende kentallen van $g_{\lambda\kappa}$ en $g^{\lambda\kappa}$ ten opzichte van dit stelsel (R): λ, κ zijn

$$g_{11} = -1, \dots, g_{ss} = -1, g_{s+1, s+1} = +1, \dots, g_{nn} = +1,$$

$$11.4) \quad g^{11} = -1, \dots, g^{ss} = -1, g^{s+1, s+1} = +1, \dots, g^{nn} = +1,$$

Een dergelijk stelsel heet een orthogonaalstelsel. De maatvectoren van een orthogonaalstelsel worden geschreven $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$

Voor een orthogonaalstelsel gebruiken we altijd latijnse lopende indices en verticale vaste indices.

De fundamentealtensor voegt aan elke covariante vector één enkele contravariante vector toe en omgekeerd

1) De ruimte der relativiteitstheorie is een R_4 met signatuur $---+$
Indien $g_{\lambda\kappa} v^{\lambda} v^{\kappa} > 0$ is, wordt in plaats van lengte ook wel van duur gesproken.

11.5)

$$v^k g_{kk} = w_k ; w_k = g_{kk} v^k$$

Daaruit volgt dat in een R_n v^k en w_k mogen worden beschouwd als twee soorten van kentallen voor één en dezelfde grootheid, de "vector" die men naar believen door een pijl of door een systeem van twee parallelle $\varepsilon_{\mu\nu}$'s met een pijl er door mag voorstellen. Vandaar dat we nu ook deze beide grootheden dezelfde kernletter geven en schrijven

11.6)

$$v^k g_{kk} = v_k ; v_k = g_{kk} v^k$$

Dit proces heet het op en neerhalen van indices. Men kan dit proces ook op affinoren toepassen, bijv.:

11.7)

$$P^{\mu\nu} = g^{\mu\kappa} P_{\kappa\lambda} ; P_{\kappa\lambda} = P^{\mu\kappa} g_{\mu\lambda}$$

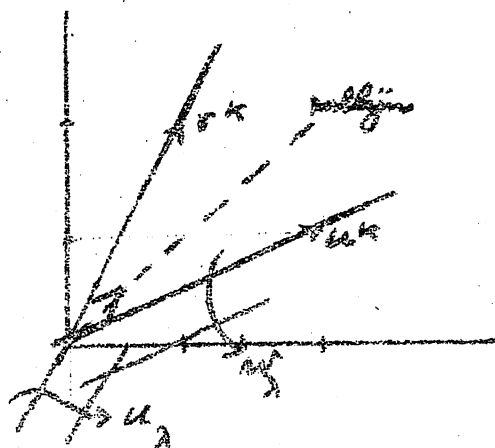
De vergelijking

11.8)

$$g_{\lambda\kappa} = g_{\lambda\mu} g_{\mu\nu} g^{\mu\kappa}$$

rechtvaardigt nu het gebruik van dezelfde kernletter voor $g_{\lambda\kappa}$ en $g^{\mu\kappa}$.

Fig. 5



Als voorbeeld beschouwen we op het orthogonale coördinaatsysteem (x^k) $k=1,2$ in een R_2 met de fundamenteeltensor

$$11.9) \quad g_{11} = +1 ; g_{22} = -1$$

de vectoren u^k en v^k

$$u^1 = 2, \quad u^2 = 1,$$

$$11.10) \quad v^1 = 1, \quad v^2 = 2.$$

Deze vectoren zijn onderling loodrecht en voor u_k en v_k vindt men

11.11)

$$u_1 = 2, \quad u_2 = -1 \\ v_1 = 1, \quad v_2 = -2$$

Uit de figuur ziet men, dat de oriënteringen van u^k en u_k gelijk gericht zijn en die van v^k en v_k tegengesteld gericht. Dit geldt algemeen: De oriënteringen van een contravariante vector v^k en zijn toegevoegde v_k zijn gelijk gericht als v^k in het + gebied ligt en tegengesteld gericht als v^k in het - gebied ligt. Dus:

Om van een vector v^k met lengte $v \neq 0$ de vector v_k te maken, construeert men twee evenwijdige vlakken $\perp v^k$ op een afstand $1/v$ en voegt daaraan de oriëntering van v^k toe als v^k in het + gebied ligt en de omgekeerde oriëntering in het andere geval.

De maatvectoren e^k van een orthogonaal systeem zijn kennelijk onderling loodrecht. De betrekkingen tussen deze en de covariante maatvectoren e_k luiden

11.12)

$$e^k = -\sum_{s=1}^n e_s^k e^s ; e^k = +\sum_{s=1}^n e_s^k e^s ; e^k = \sum_{s=1}^n e_s^k e^s$$

en voor de orthogonale kentallen van een vector geldt

11.13)

$$v^k = \begin{cases} -v_k & k=1, \dots, s \\ +v_k & k=s+1, \dots, n \end{cases}$$

Men controleert dit alles gemakkelijk aan de hand van (11.4). In orthogonale coördinaten is de lengte van v^k

11.14)

$$v = \sqrt{-v^1 v_1 - \dots - v^s v_s + v^{s+1} v_{s+1} + \dots + v^n v_n}$$

en de vergelijking van de nulkegel is

$$11.15) -x^1 x^1 - \dots - x^s x^s + x^{s+1} x^{s+1} + \dots + x^n x^n = 0$$

In een R_n zijn de volgende n -vectoren op het teken na vastgelegd

$$11.16) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^{k_1 \dots k_n} = n! \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^{k_1 \dots k_n}; \text{ dus } \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^{1 \dots n} = 1, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^{\lambda_1 \dots \lambda_n} = n! \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^{\lambda_1 \dots \lambda_n}; \text{ dus } \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^{\lambda_1 \dots \lambda_n} = 1.$$

Hun meetkundig beeld is het eenheidsvolume voorzien van de schroefzin vastgelegd door $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^{k_1 \dots k_n}$ in deze volgorde. Het teken wisselt bij overgang tot een orthogonaalsysteem met andere schroefzin. Wij onderscheiden in een R_n steeds eenheidsvolumen (e.v.) vastgelegd door de fundamenteaaltensor en maatvolume (m.v.) zijnde het parallelotoop der maatvectoren t.o. van een willekeurig affiecoördinatenstelsel. De massa per m.v. is een scalaire dichtheid maar de massa per e.v. is een scalar als de fundamenteaaltensor vast blijft.

Het kental $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ laat zich opvatten als een kental van een scalaire Δ -dichtheid van het gewicht +1.

$$11.17) \tilde{\omega}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^{k_1 \dots k_n} \text{ met } 1/\tilde{\omega}$$

Indien $\tilde{\omega}$ een scalar is met kental +1 t.o. van alle coördinatenstelsels met dezelfde schroefzin als n dan is

$$11.18) \tilde{\omega} = \frac{1}{\omega} \tilde{\omega}$$

een gewone scalaire dichtheid van het gewicht +1 en deze dichtheid heeft weer het kental +1 ten opzichte van alle orthogonale coördinatenstelsels behorende bij $g_{\lambda\mu}$. Dit komt natuurlijk doordat $\tilde{\omega}$ de tekenwisseling weer te niet doet. Deze $\tilde{\omega}$ staat in nauw verband met $g_{\lambda\mu}$. Inderdaad is

$$11.19) g[\omega] = |\det(g_{\lambda\mu})| = n! |g_{11} g_{22} \dots g_{nn}|$$

een dichtheid van het gewicht +2 en daar $g[\omega] = 1$, volgt

$$11.20) \tilde{\omega} = |g|^{1/2}$$

In tegenstelling tot $\tilde{\omega}$ heeft ω geen schroefzin en dat komt uit, een fundamenteaaltensor ligt immers alleen een maat vast en geen schroefzin.

In de gewone ruimte gebruiken we de signaturen - - - en + + +. De eerste is belangrijk wegens de voorkeur die de signatuur - - - + in de relativiteitstheorie geniet.

Zodra een fundamenteaaltensor is ingevoerd kan men voor een gegeven tensor $T_{\lambda\mu}$ de vraag stellen of er ook vectoren v^λ zijn, die aan de vergelijking

$$11.21) T_{\lambda\mu} v^\mu = \sigma g_{\lambda\mu} v^\mu$$

voldoen, waarin σ een passend gekozen scalar is. Schrijft men deze vergelijking

$$11.22) (T_{\lambda\mu} - \sigma g_{\lambda\mu}) v^\mu = 0$$

dan volgt onmiddellijk dat de rang van $T_{\lambda\mu} - \sigma g_{\lambda\mu}$ niet n kan zijn. Eerste voorwaarde is dus

$$11.23) \det(T_{\lambda\mu} - \sigma g_{\lambda\mu}) = 0$$

Dit is de zogenaamde S-vergelijking bekend uit de theorie der kwadratische oppervlakken waarvan bekend is (voor reële $T_{\lambda\mu}$ en definitieve $g_{\lambda\mu}$ dat zij alleen reële wortels bezit. Zijn σ en σ' twee ongelijke wortels en zijn v^λ en v'^λ de vectoren die voor deze waarden van σ aan (11.21) voldoen dan volgt

$$11.24) T_{\lambda\mu} v^\mu = \sigma g_{\lambda\mu} v^\mu$$

en dat is alleen mogelijk indien $v^k \perp v^k$ en bovendien

11.25)

$$v^k T_{jk} v^k = 0$$

Is σ een m-voudige wortel van (11.23) dan kan men bewijzen, dat de vectoren die aan (11.21) voldoen voor $\sigma = \sigma_i$ juist alle vectoren zijn, die in een bepaalde R_m in R_n liggen. In deze R_m kan men dus op veel wijzen er m onderling loodrechte uitzoeken, die dan elk loodrecht staan op alle vectoren, die bij andere wortels behoren. Op deze wijze krijgt men n onderling loodrechte vectoren, alle voldoende aan (11.21). Legt men een orthogonaal coördinatenstelsel in de richtingen dezer vectoren, dan volgt

11.26)

$$T_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad T_{ik} = 0 \quad \text{om } i \neq j$$

en daarmee is bewezen

Hoofdasenstelling van een tensor:

Is de fundamenteeltensor definitief en is een reële tensor dan is het altijd mogelijk een reëel orthogonaal coördinatenstelsel (h) te vinden zo dat

$$T_{ij} = 0 \quad ; \quad i \neq j.$$

Er bestaat een corresponderende stelling voor bivectoren:

Hoofdbladenstelling van een bivector:

Is de fundamenteeltensor definitief en is $F_{\lambda\mu}$ een reële bivector dan is het altijd mogelijk een reëel orthogonaal coördinatenstelsel (h) te vinden zo dat de nietverdwijnende kentallen van $F_{\lambda\mu}$ zijn

$$F_{12}, F_{23}, \dots, F_{r-1,r}$$

en zodat dus de bivector ontbonden is in $\frac{1}{2}r$ onderling loodrechte bladen.

Het verdient opmerking dat noch de hoofdasenstelling noch de hoofdbladenstelling blijven gelden wanneer de fundamenteeltensor indefinitief is. Dit ligt daaraan dat de tensor of bivector een speciale stand zou kunnen hebben t.o. van de reële nulkegel. Voor "algemene stand" blijven de stellingen gelden maar dit is vaag en voorzichtigheid is geboden.

III IDENTIFICERING VAN GROOTHEDEN NA INVOERING VAN EEN ONDERGROEP VAN

§ 12 Introductie van een eenheidsvolume (ondergroep G_{22})

Een eenheidsvolume is gegeven door een gewone scalaire dichtheid van gewicht + 1. Men kan nu p-vectoren met p-vectordichtheden (gewicht + 1) identificeren en W-p-vectoren met p-vector- Δ -dichtheden (gew.+1) volgens het schema

12.1)

$$\begin{aligned} \omega^{k_1 \dots k_p} &= \sigma_1 v^{k_1 \dots k_p} & \tilde{\omega}^{k_1 \dots k_p} &= \sigma_1 \tilde{v}^{k_1 \dots k_p} \\ \omega_{\lambda_1 \dots \lambda_p} &= \sigma_1^{-1} w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} & \tilde{\omega}_{\lambda_1 \dots \lambda_p} &= \sigma_1^{-1} \tilde{w}_{\lambda_1 \dots \lambda_p} \end{aligned}$$

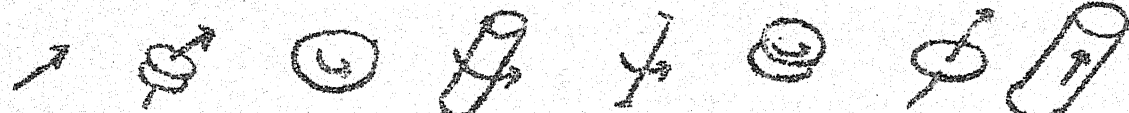
Indien σ_1 behoort bij de fundamenteeltensor $\sigma_1 = \sigma_1 g^{\frac{1}{2}}$ geeft dit in orthogonale kentallen

12.2)

$$\begin{aligned} \omega^{h_1 \dots h_p} &= v^{h_1 \dots h_p} & \tilde{\omega}^{h_1 \dots h_p} &= \tilde{v}^{h_1 \dots h_p} \\ \omega_{i_1 \dots i_p} &= w_{i_1 \dots i_p} & \tilde{\omega}_{i_1 \dots i_p} &= \tilde{w}_{i_1 \dots i_p} \end{aligned}$$

Beschouwen we in R_3 de grootheden

12.3)



$$\begin{array}{cccccccc}
 v^k & w_\lambda & f^{\lambda\lambda} & h_{\lambda k} & m_{\lambda k} & m^{\lambda k} & f_\lambda & g^{\lambda k} \\
 \tilde{w}_{\lambda k} & \tilde{m}^{\lambda k} & \tilde{f}_\lambda & \tilde{g}^{\lambda k} & \tilde{v}^k & \tilde{w}_\lambda & \tilde{f}^{\lambda k} & \tilde{h}_{\lambda k}
 \end{array}$$

dan geeft dit de identificeringen

12.4)



$$\begin{array}{cccccc}
 v^k = f^1 & w_\lambda = f_\lambda & f^{\lambda\lambda} = m^{\lambda\lambda} & h_{\lambda k} = m_{\lambda k} \\
 \tilde{w}_{\lambda k} = \tilde{h}_{\lambda k} & \tilde{m}^{\lambda k} = \tilde{f}^{\lambda k} & \tilde{f}_\lambda = \tilde{w}_\lambda & \tilde{g}^{\lambda k} = \tilde{v}^k
 \end{array}$$

De vier grootheden hebben nu elk twee meetkundige representaties en vier notaties voor de kentallen. Overeenkomstig hun eenvoudigst meetkundig beeld worden zij veelal genoemd: polaire vector, polaire bivector, axiale bivector en axiale vector.

Indien wij (12.2) vergelijken met (10.3) en (10.8) dan volgt dat teneinde overeenstemming te bereiken de nog vrij gelaten exponenten aan de volgende voorwaarden moeten voldoen

12.5)

$$\delta_p \equiv -\beta_p \pmod{2} ; \delta_0 \equiv -\alpha_p \pmod{2}.$$

§ 13. Introductie van een fundamenteeltensor (onder-groep G_{00})

Na introductie van $g_{\lambda\lambda}$ hebben wij de volgende identificeringen

13.1)

$$\begin{array}{l}
 v^{k_1 \dots k_p} = g^{k_1 \lambda_1} \dots g^{k_p \lambda_p} w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} ; \tilde{v}^{k_1 \dots k_p} = g^{k_1 \lambda_1} \dots g^{k_p \lambda_p} \tilde{w}_{\lambda_1 \dots \lambda_p} \\
 m^{k_1 \dots k_p} = g^{k_1 \lambda_1} \dots g^{k_p \lambda_p} m_{\lambda_1 \dots \lambda_p} ; \tilde{m}^{k_1 \dots k_p} = g^{k_1 \lambda_1} \dots g^{k_p \lambda_p} \tilde{m}_{\lambda_1 \dots \lambda_p}
 \end{array}$$

of in orthogonale kentallen, indien ϵ_p het aantal - tekens is onder de eerste p tekens van de signatuur

13.2)

$$\begin{array}{l}
 v^{1 \dots p} = (-1)^{\epsilon_p} w_{1 \dots p} ; \tilde{v}^{1 \dots p} = (-1)^{\epsilon_p} \tilde{w}_{1 \dots p} \\
 m^{1 \dots p} = (-1)^{\epsilon_p} g m_{1 \dots p} ; \tilde{m}^{1 \dots p} = (-1)^{\epsilon_p} g \tilde{m}_{1 \dots p}
 \end{array}$$

In R_3 beschouwen we alleen de beide signaturen $\pm \pm \pm$. Dan hebben we, aangezien $g_{\lambda\lambda}$ vanzelf al een eenheidsvolume vastlegt, de identificeringen

13.3)



$$\begin{array}{l}
 \pm v^1 = \pm f^1 = \pm w_1 = \pm f_1 ; \pm f^{23} = \pm m^{23} = \pm h_{23} = \pm m_{23} \\
 \pm \tilde{v}_{23} = \pm \tilde{h}_{23} = \pm \tilde{m}^{23} = \pm \tilde{f}^{23} ; \pm \tilde{f}_1 = \pm \tilde{w}_1 = \pm \tilde{f}^1 = \pm \tilde{v}^1
 \end{array}$$

De twee grootheden hebben nu elk vier geometrische representaties en acht notaties voor de kantallen. Overeenkomstig hun eenvoudigst meetkundig beeld worden zij vaak genoemd polaire vector en axiale vector.

Vergelijking van (13.2) met (10.3) en (10.8) leert dat de exponenten behalve aan (12.5), aan de volgende voorwaarden moeten voldoen:

$$13.4) \quad \alpha_{n,p} - \beta_p \equiv p(n-p) \begin{cases} +1 \\ -0 \\ +0 \end{cases} \pmod{2}$$

$$\delta_p - \delta_{n,p} \equiv p(n-p) \begin{cases} +1 \\ +0 \\ +0 \end{cases} \pmod{2}$$

voor negatieve/positieve signatuur.

§ 14. Introductie van een schroefzin (ondergroep der transformaties met

een schroefzin is gegeven door een ω -scalar $\tilde{\omega}$ wiens kental de waarden $+1$ en -1 kan aannemen. $\tilde{\omega}$ geeft de volgende identificeringen

$$14.1) \quad \tilde{v}^{k_1 \dots k_p} = \tilde{\omega} v^{k_1 \dots k_p}$$

$$\tilde{\omega}_{\lambda_1 \dots \lambda_p} = \tilde{\omega} \omega_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$$

$$\tilde{w}^{k_1 \dots k_p} = \tilde{\omega} w^{k_1 \dots k_p}$$

$$\tilde{w}_{\lambda_1 \dots \lambda_p} = \tilde{\omega} w_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$$

In $\tilde{E}$ hebben we dus indien $\tilde{\omega}[\tilde{E}]$ de schroefzin van $\tilde{E}$ in deze volgorde:

$$14.2) \quad \tilde{v}^1 = \tilde{v}^1 \quad \tilde{f}^1 = \tilde{f}^1 \quad \tilde{w}_1 = \tilde{w}_1 \quad \tilde{f}_1 = \tilde{f}_1$$

$$\tilde{w}_{12} = \tilde{w}_{12} \quad \tilde{f}_{23} = \tilde{f}_{23} \quad \tilde{w}_{23} = \tilde{w}_{23} \quad \tilde{f}^{23} = \tilde{f}^{23}$$

De vier grootheden hebben nu elk twee meetkundige representaties en vier notaties voor de kantallen.

Vergelijking van (13.5) met (10.3) en (10.8) doet zien dat de exponenten moeten voldoen aan de voorwaarden

$$14.3) \quad \alpha_p \equiv \beta_p \pmod{2}$$

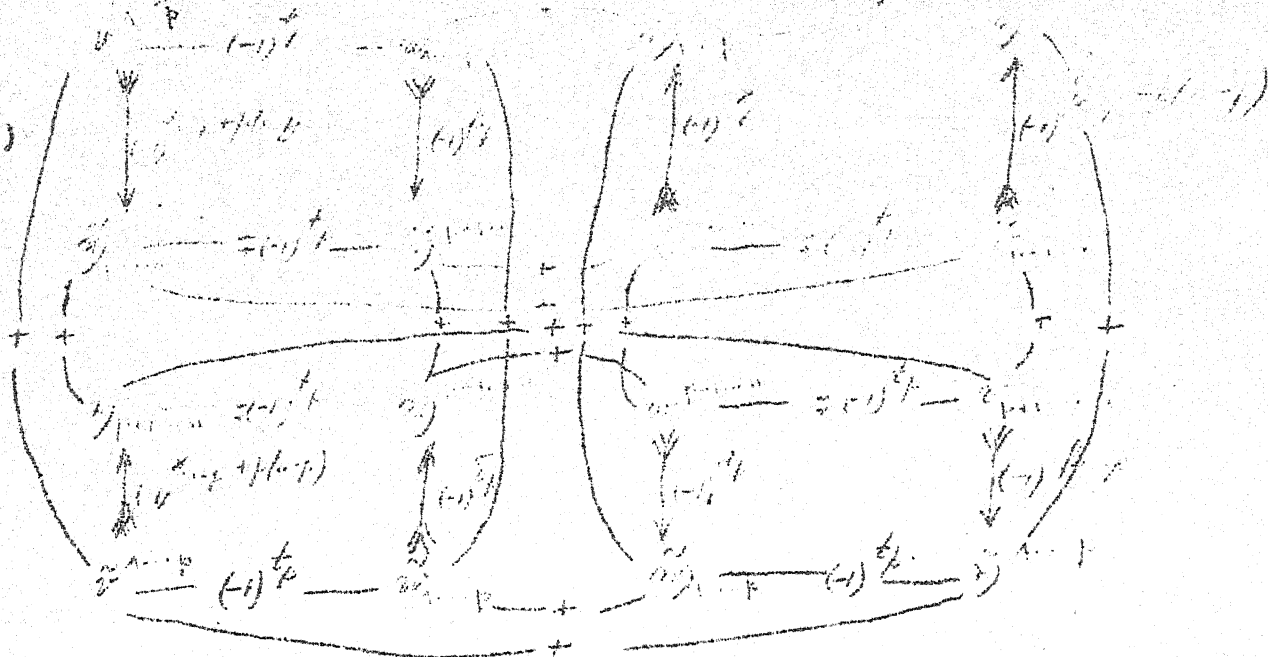
$$\beta_p \equiv \delta_p \pmod{2}$$

§ 15. Introductie van een fundamenteel tensor en een schroefzin (onder-

groep)

Nu gelden alle identificeringen in orthogonale coördinaten:

15.1)



en de acht exponenten voor iedere waarde van p moeten voldoen aan alle voorwaarden (12.5), (13.4), (14.3):

$$15.2) \left. \begin{aligned} \delta_p &\equiv -\beta_p & \alpha_{n-p} - \beta_p &\equiv p/(n-p) \begin{cases} +1 \\ +0 \end{cases} & \alpha_p &\equiv \delta_p \\ (\gamma_{n-p} &\equiv -\beta_{n-p}) & \alpha_p - \beta_{n-p} &\equiv p/(n-p) \begin{cases} +1 \\ +0 \end{cases} & \alpha_{n-p} &\equiv \delta_{n-p} \\ \delta_p &\equiv -\alpha_p & (\gamma_p - \delta_{n-p} &\equiv p/(n-p) \begin{cases} +1 \\ +0 \end{cases}) & (\beta_p &\equiv \delta_p) \\ \delta_{n-p} &\equiv -\alpha_{n-p} & (\gamma_{n-p} - \delta_p &\equiv p/(n-p) \begin{cases} +1 \\ +0 \end{cases}) & (\beta_{n-p} &\equiv \delta_{n-p}) \end{aligned} \right\} \pmod{2}$$

Van deze 12 congruenties zijn er zeven onafhankelijk. De anderen zijn tussen haakjes geplaatst.

Voor R_3 hebben we nu de identificeringen

$$f = \tilde{f} = \tilde{g} = \tilde{h} = \tilde{i} = \tilde{j} = \tilde{k} = \tilde{l} = \tilde{m} = \tilde{n}$$

$$15.3) \begin{aligned} \pm v^1 &= \pm f^1 = \pm \tilde{v}_1 = \pm \tilde{f}_1 = \pm \tilde{v}^1 = \pm \tilde{f}^1, \quad \pm w_1 = \pm f_1 \\ \pm w_{23} &= \pm \tilde{h}_{23} = \pm \tilde{w}^{23} = \pm \tilde{f}^{23}, \quad \pm w_{23} = \pm \tilde{h}_{23} = \pm \tilde{w}^{23} = \pm \tilde{f}^{23} \end{aligned}$$

maar hier, evenmin als in (12.4), (13.3) en (14.2) staat nog niet vast hoe de bovenste rij kentallen met de onderste rij samenhangt, m.a.w. of

$$\text{of } v^1 = +w_{23} \text{ of } v^1 = -w_{23},$$

Dit hangt af van de keuze der exponenten

Er is nu nog maar één grootheid over; de vector met 8 meerkundige representaties en 16 notaties voor de kentallen. Dit is het standpunt van de gewone vector-analyse. Er moet uitdrukkelijk op worden gewezen, dat uitdrukkingen als "polaire vector" enz. alleen mogen worden gebezigd als vastligt, welke groep ten grondslag gelegd is. Anders zijn zulke termen taboes.

Met behulp van de 7 congruenties (15.2) kan men alle exponenten uitdrukken

$$15.4) \begin{aligned} \alpha_p &\equiv \beta_p & \beta_p &\equiv -\alpha_p & \delta_p &\equiv \alpha_p & \delta_p &\equiv -\alpha_p \\ \alpha_{n-p} &\equiv -\alpha_p + p/(n-p) \begin{cases} +1 \\ +0 \end{cases} & \beta_{n-p} &\equiv \alpha_p + p/(n-p) \begin{cases} +1 \\ +0 \end{cases} & \delta_{n-p} &\equiv -\alpha_p + p/(n-p) \begin{cases} +1 \\ +0 \end{cases} & \delta_{n-p} &\equiv \alpha_p + p/(n-p) \begin{cases} +1 \\ +0 \end{cases} \end{aligned}$$

Voor n oneven is $(h(n-p)/2)^2$ en men krijgt dus als eenvoudigste oplossingen

n oneven, signatuur negatief

15.5)

$$\alpha_p = \beta_p = \gamma_p = \delta_p = p$$

n oneven, signatuur positief

15.6)

$$\alpha_p = \beta_p = \gamma_p = \delta_p = 0$$

Voor n even is $(h(n-p)/2)^2 \equiv p^2 \pmod{p}$. Dit levert moeilijkheden op voor n even en $2p \equiv n$ want dan wordt α_p imaginair voor p even en negatieve signatuur en voor p oneven en positieve signatuur. Men doet het verstandigste door voor n even tot de groep $\mathbb{F}_n$ terug te keren, d.w.z. de identificeringen tussen geslaagde en ongeslaagde grootheden te laten vervallen. Dan vervalt (14.3) en de overblijvende 6 congruenties zijn

15.7)

$$\gamma_p = -\beta_p$$

$$\delta_{n-p} = -\beta_{n-p}$$

$$\delta_p = -\alpha_p$$

$$\delta_{n-p} = -\alpha_{n-p}$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{n-p} - \beta_p &\equiv p \pmod{p} \\ \alpha_p - \beta_{n-p} &\equiv p \pmod{p} \end{aligned} \right\} \begin{matrix} +1 \\ +0 \\ +1 \\ +0 \end{matrix}$$

De eenvoudigste oplossingen zijn

n even, signatuur negatief

15.8)

$$\alpha_p = \alpha_{n-p} = \delta_p = \delta_{n-p} = 0$$

$$\beta_p = \beta_{n-p} = \gamma_p = \gamma_{n-p} = p$$

n even, signatuur positief

$$\alpha_p = \alpha_{n-p} = \delta_p = \delta_{n-p} = 0$$

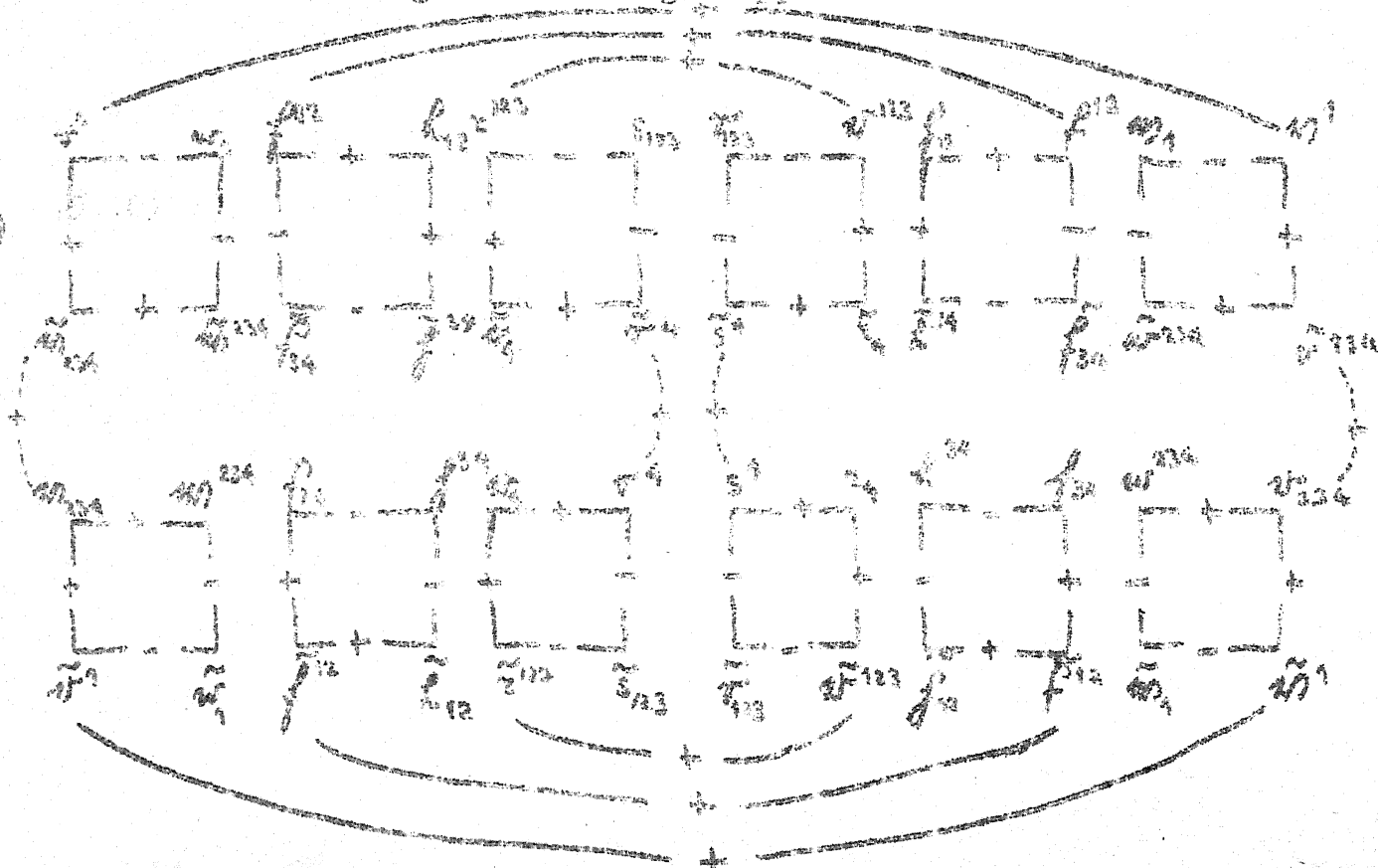
15.9)

$$\beta_p = \beta_{n-p} = \gamma_p = \gamma_{n-p} = p$$

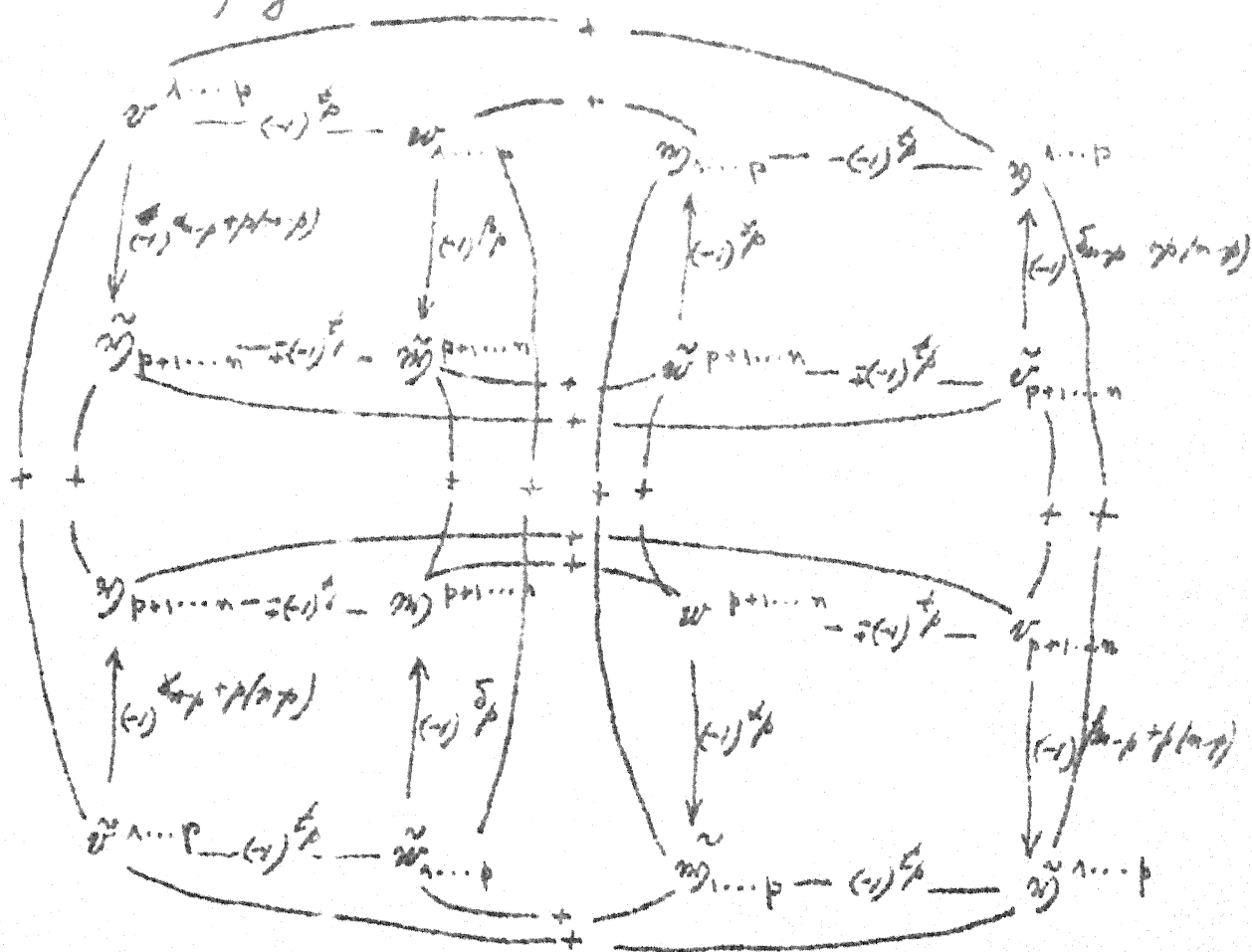
Met deze waarden krijgen we voor $n = 3$ zodanige tekens dat nu in (12.4), (13.3), (14.2) en (15.3) ook de boven elkaar staande kentallen gelijk worden.

Voor de $\mathbb{F}_4$ van de relativiteitstheorie met signatuur $- - - +$ krijgen we de identificeringen (niet de gestippelde)

5.10)



Rehert by 23.



waaraan we als er een schroefzin is ingevoerd (voor pomen nog de gestipelde identificeringen)

met als gevolg $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_1$, $\tilde{e}^{123} = \tilde{e}^{123}$, $\tilde{e}_4 = \tilde{e}_4$, $\tilde{e}^{234} = \tilde{e}^{234}$ mogen toevoegen zodat althans voor deze waarden van p de schroefzin 1,2,3,4 een identificerende rol kan spelen. Voor p even lukt dit echter niet. Wil men $\tilde{e}^{123}$ stellen dan zou volgen $\tilde{e}^{123} = \tilde{e}^{123}$. Uiteindelijk krijgen we dus in deze $\tilde{R}_4$ met schroefzin twee soorten grootheden, de vector met 8 meetkundige representaties en 16 notaties voor de kentallen en de bivector met 4 meetkundige representaties en 8 notaties voor de kentallen. Laat men de schroefzin weg dan krijgt men drie soorten grootheden, vector, bivector en trivector elk met 4 meetkundige representaties en 8 notaties voor de kentallen.

IV GEOMETRISCHE OBJECTEN IN X_m

§ 16. De X_m

Wij beschouwen de verzameling van alle stellen van n waarden van n variabelen $\xi^k = 1, \dots, n$ en noemen elk stel een punt, het punt ξ^k .

Worden andere variabelen $\xi^{k'}$ geïntroduceerd

$$16.1) \quad \xi^{k'} = \xi^k(\xi^k)$$

dan stellen we de eis, dat de functies $\xi^{k'}$ analytisch zijn in het beschouwde gebied en dat de matrix van

$$16.2) \quad A_k^{k'} = \frac{\partial \xi^{k'}}{\partial \xi^k}$$

aldaar de rang heeft, dan bestaat er een gebied waarin de omkering

$$16.3) \quad \xi^k = \xi^{k'}(\xi^{k'}) \quad f(k')$$

eenduidig bepaald is en de ξ^k zijn aldaar analytisch. De verzameling van alle punten uitgerust met alle coördinatenstelsels die uit (16.3) kunnen worden gevormd met behulp van dergelijke analytische en omkeerbare transformaties, heet een X_n . Het verschil tussen een ξ_n en een X_n is dat de groep G_n vervangen wordt door de verzameling $\mathcal{K}_n$ van alle ons bekende transformaties. $\mathcal{K}_n$ is geen groep, maar een "pseudogroep" d.w.z. twee transformaties leveren altijd weer een transformatie behorende tot $\mathcal{K}_n$ indien zij ne elkaar kunnen worden uitgevoerd, maar dat is niet altijd het geval.

In een X_n bestaan geen rechte lijnen, platte vlakken enz. Men neemt daarom de $\xi^{k'}$ in X_n wel krullende coördinaten. Er is niets tegen in een ξ_n eveneens krullende coördinaten n te voeren, men beschouwt de ξ_n dan als X_n en maakt wat de coördinaten betreft geen gebruik van de typische ξ_n -eigenschappen.

§ 17 Geometrische objecten in X_n

Een geometrisch object in een bepaald punt ξ^k van een X_n is een correspondentie tussen de coördinaten reëel afzonderseels enerzijds en de geordende stellen van n kentallen anderzijds die aan de volgende voorwaarden voldoet:

- aan ieder gegeven coördinatenstelsel is één en slechts één geordend stel van n kentallen toegevoegd;
- indien $\mathcal{Q}_A$, $A = 1, \dots, A'$ en $\mathcal{Q}_{A'}$, $A' = 1, \dots, A'$ corresponderen met (k) en (k') , dan hangen de $\mathcal{Q}_A$ alleen af van de $\mathcal{Q}_{A'}$ en van de functies $\xi^k(\xi^{k'})$ in de omgeving van ξ^k .

De $\mathcal{Q}_A$ heten de kentallen van het object met betrekking tot $(\mathcal{K})$. Geometrische objecten in X_n worden onderscheiden naar de transformatiewijze

hunner kentallen.

Zijn de Φ_A' lineair homogeen in de Φ_A , homogeen algebraïsch in de A_K' en onafhankelijk van de afgeleiden der A_K' , dan heet het geometrisch object een geometrische grootheid.

Is een object gedefinieerd in elk punt van een zeker gebied der dan ontstaat een objectveld in dat gebied. Ondersteld wordt steeds, dat de kentallen analytische functies der coördinaten zijn.

Een punt ξ^K is een object maar geen grootheid. De differentialen $d\xi^K$ vormen echter een grootheid, het linelement:

$$17.1) \quad d\xi^{K'} = A_K^{K'} d\xi^K$$

(17.1) leert, dat Φ_n in elk punt de groep G_h induceert. Bijgevolg is aan ieder punt ξ^K der X_n een gecentreerde ξ_n toegevoegd, de lokale ξ_n van dat punt. Het is gebruikelijk het centrum van ξ_n met ξ^K te identificeren. Twee locale ξ_n 's in verschillende punten hebben niets met elkaar te maken, met name hebben zij geen enkel punt gemeen.

Aangezien er in elk punt der X_n een gecentreerde locale ξ_n is kunnen alle definities van grootheden uit hoofdstuk II eenvoudig overgenomen worden. Het enige verschil is, dat $A_K^{K'}$ niet langer een stel constanten voorstelt maar een stel functies der ξ^K namelijk de afgeleiden der $\xi^{K'}$ naar de ξ^K .

Optelling van grootheden, vermenigvuldiging, overschuiving, enz. volgen dezelfde wetten als in de ξ maar alleen in één en dezelfde locale ξ_n . Grootheden in verschillende ξ_n 's kunnen niet op deze wijze gecombineerd worden. Iedere locale ξ_n is een wereld apart.

Om de maatvectoren te verkrijgen voeren we n scalaren ξ^K in, numeriek gelijk aan de ξ^K :

$$17.2) \quad \xi^K = \xi^K$$

dan verkrijgt men bij differentiatie de volgende betrekkingen

$$a) \quad \xi^K \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \xi^K}{\partial \xi^\lambda} \quad \text{contravariante maatvectoren}$$

$$b) \quad \xi_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \xi^K}{\partial \xi^K} \quad \text{covariante maatvectoren}$$

$$17.3) c) \quad \delta_\lambda^\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \xi^K}{\partial \xi^K} \quad \text{Kronecker symbool}$$

$$d) \quad A_\lambda^K \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \xi^K}{\partial \xi^\lambda} \quad \text{eenheidsaffinor}$$

1) De Φ_A' zijn dus functionalen. Verg. Schouten en Haantjes, On the theory of the geometric object, Proc. London Math. Soc. 1936, 356-376

§ 18 Invariante differentiaaloperatoren I. Grad, Div. en Rot.

De afgeleiden van een vector of affinor bijv. w_λ vormen geen geometrisch object. Immers

$$18.1) \quad \partial_{\mu'} w_\lambda = A_{\mu'}^\mu \partial_\mu A_\lambda^\lambda w_\lambda = A_{\mu'}^\mu \partial_\mu w_\lambda + w_\lambda H_{\mu'}^\mu \partial_\mu A_\lambda^\lambda$$

$$= A_{\mu'}^\mu \partial_\mu w_\lambda + w_\lambda \partial_{\mu'} A_\lambda^\lambda$$

De $\partial_{\mu'} w_\lambda$ samen met de w_λ vormen dus wel een geometrisch object maar geen geometrische grootheid. Vitali heeft hiervan gebruik gemaakt.

Er zijn echter enige invariante differentiaaloperatoren

a. De natuurlijke afgeleide of gradient van een scalar of W -scalar:

$$18.2) \quad \partial_{\mu'} p = A_{\mu'}^{\mu} \partial_{\mu} p \quad ; \quad \partial_{\mu'} \tilde{p} = A_{\mu'}^{\mu} \partial_{\mu} \tilde{p}$$

Andere schrijfwijze:

$$18.3) \quad \Pi p = \text{Grad } p \quad ; \quad \Pi \tilde{p} = \text{Grad } \tilde{p}$$

b. De natuurlijke afgeleide of rotatie van een covariante q -vector of W - q -vector, bijv.

$$18.4) \quad (q+1) \partial_{\mu'} w_{\lambda_1' \dots \lambda_{q+1}'} = (q+1) A_{\mu' \lambda_1' \dots \lambda_{q+1}'}^{\mu \lambda_1 \dots \lambda_{q+1}} \partial_{\mu} w_{\lambda_1 \dots \lambda_{q+1}} + (q+1) \left[\partial_{\mu'} A_{\lambda_1' \dots \lambda_{q+1}'}^{\lambda_1 \dots \lambda_{q+1}} \right] w_{\lambda_1 \dots \lambda_{q+1}} \\ = A_{\mu' \lambda_1' \dots \lambda_{q+1}'}^{\mu \lambda_1 \dots \lambda_{q+1}} (q+1) \partial_{\mu} w_{\lambda_1 \dots \lambda_{q+1}}$$

omdat

$$18.5) \quad \partial_{\mu'} A_{\lambda_1' \dots \lambda_{q+1}'}^{\lambda_1 \dots \lambda_{q+1}} = \partial_{\mu'} \partial_{\lambda_1' \dots \lambda_{q+1}'} \xi^{\lambda_1 \dots \lambda_{q+1}} = 0$$

De rotatie is een $(q+1)$ -vector of W -($q+1$)-vector en wordt ook wel geschreven met weglating van alle indices

$$18.6) \quad (q+1) \Pi w = \text{Rot } w \quad ; \quad (q+1) \Pi \tilde{w} = \text{Rot } \tilde{w}$$

c. De natuurlijke afgeleide of divergentie van een contravariante p -vectordichtheid of p -vector- Δ -dichtheid van het gewicht $+1$, bijv.:

$$18.7) \quad \partial_{\mu'} \eta^{\mu' \kappa_2' \dots \kappa_p'} = A_{\kappa_2' \dots \kappa_p'}^{\kappa_2 \dots \kappa_p} \partial_{\mu} \eta^{\mu \kappa_2 \dots \kappa_p}$$

De divergentie is een $(p-1)$ -vectordichtheid of $(p-1)$ -vector- Δ -dichtheid van het gewicht $+1$. Wij geven hier het bewijs alleen voor $p=1$:

$$18.8) \quad \partial_{\mu'} \eta^{\mu'} = A_{\mu'}^{\mu} \partial_{\mu} \Delta^{-1} A_{\lambda}^{\lambda} \eta^{\lambda} = \Delta^{-1} \partial_{\mu} \eta^{\mu} + \eta^{\mu} \partial_{\mu} \Delta^{-1} \\ = \eta^{\mu} \partial_{\mu} \Delta^{-1} + \Delta^{-1} A_{\mu'}^{\mu} \eta^{\lambda} \partial_{\lambda} A_{\mu'}^{\mu} + \Delta^{-1} \eta^{\lambda} \partial_{\mu} A_{\mu'}^{\mu} \\ = \eta^{\lambda} \partial_{\lambda} \Delta^{-1} - \Delta^{-1} A_{\mu'}^{\mu} \eta^{\lambda} \partial_{\lambda} A_{\mu'}^{\mu} + \Delta^{-1} \partial_{\mu} \eta^{\mu}$$

Nu is tengevolge van (1.5)

$$18.9) \quad \partial_{\lambda} \log \Delta^{-1} = \frac{\partial \log \Delta^{-1}}{\partial A_{\mu'}^{\mu}} \partial_{\lambda} A_{\mu'}^{\mu}$$

en bijgevolg

$$18.10) \quad \partial_{\mu'} \eta^{\mu'} = \Delta^{-1} \partial_{\mu} \eta^{\mu}$$

A

andere schrijfwijze:

$$18.11) \quad \Pi \eta = \text{Div } \eta \quad ; \quad \Pi \tilde{\eta} = \text{Div } \tilde{\eta}$$

Uit de definitievergelijkingen volgt onmiddellijk

$$18.12) \quad \begin{array}{ll} \text{a) } \text{Rot Grad } p = 0 & \text{Rot Grad } \tilde{p} = 0 \\ \text{b) } \text{Rot Grad } w = 0 & \text{Rot Rot } \tilde{w} = 0 \\ \text{c) } \text{Div Div } \eta = 0 & \text{Div Div } \tilde{\eta} = 0 \end{array}$$

Men kan bewijzen:

Een covariante vector w_{λ} (W-vector $\tilde{w}_{\lambda}$) is dan en alleen dan gradient van een scalar (W-scalar) indien $\text{Rot } w = 0$ ($\text{Rot } \tilde{w} = 0$)

Een covariante q-vector $w_{\lambda_1 \dots \lambda_q}$ (W-q-vector $\tilde{w}_{\lambda_1 \dots \lambda_q}$) is voor $q > 1$ dan en alleen dan rotatie van een (q-1)-vector (W-(q-1)-vector) indien $\text{Rot } w = 0$ ($\text{Rot } \tilde{w} = 0$)

Een contravariante p-vector $w^{\lambda_1 \dots \lambda_p}$ (p-vector- Δ -dichtheid $\tilde{w}^{\lambda_1 \dots \lambda_p}$) is voor $p > 1$ dan en alleen dan divergentie van een (p+1)-vector $w_{\lambda_1 \dots \lambda_{p+1}}$ ((p+1)-vector- Δ -dichtheid) indien $\text{Div } w = 0$ ($\text{Div } \tilde{w} = 0$)

We beschouwen nu de verschillende gevallen voor $n=3$.

a. Gradient scalar en divergentie trivector-dichtheid.

De oppervlakken

18.13) $\rho = \text{constant}$

heten de equiscalaire oppervlakken van het scalarveld ρ . Is w_λ de gradient van ρ dan hebben in elk punt de twee vlakken van w_λ de 2-richting van het raakvlak aan het equiscalaire oppervlak door dat punt. Neem nu twee van die oppervlakken in elkaars buurt

18.14) $\rho = c$; $\rho = c + d\epsilon$

en een punt z^k op het eerste oppervlak. Dan is

18.15) $dw = w_\lambda dz^\lambda$

en de vergelijking

18.16) $w_\lambda dz^\lambda = d\epsilon$

drukt dus uit dat $z^k + d z^k$ op het tweede oppervlak ligt. Bijgevolg stellen de facetjes van de twee oppervlakken in z^k en $z^k + d z^k$ precies de vector $w_\lambda/d\epsilon$ voor. Een gradientveld is dus niet alleen X_2 -vormend d.w.z. overal tangerend aan een stel van $\omega^i X_2^i$ maar bovendien passen de op "infinitesimale schaal" getekende gradientvectoren aan elkaar en vormen een stel dubbeloppervlakken die de ruimte geheel opvullen.

Een veld van de vorm

18.17) $w_\lambda = \alpha \partial_\lambda \rho$

is blijkbaar ook X_2 -vormend maar de vectoren w_λ sluiten niet meer zo mooi aan elkaar. Nodig en voldoende voorwaarde opdat een veld X_2 -vormend, d.i. van de vorm (18.17) is, is overigens dat

18.18) $w_\lambda \partial_\mu w_\lambda = 0$

ρ correspondeert met de trivector- Δ -dichtheid $\rho \epsilon^{\lambda\mu\nu}$. Vormt men nu van deze grootheid de divergentie dan komt er

18.19) $\partial_\kappa \rho \epsilon^{\kappa\lambda\mu} = (\partial_\kappa \rho) \epsilon^{\kappa\lambda\mu}$

en volgens (10.2) correspondeert deze grootheid precies met $\mp \partial_\kappa \rho$ (voor $\mp = +$). Het is dus op een factor na precies hetzelfde of men de natuurlijke afgeleide neemt van een scalar of van de corresponderende grootheid. Dat geldt algemeen. De algemene omzettingsformule luidt als volgt.

Is $\tilde{m}^{\lambda_1 \dots \lambda_{p+1}}$ toegevoegd aan $w_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$ en is $\tilde{m}^{\lambda_1 \dots \lambda_p}$ toegevoegd aan $(p+1) \partial_{\lambda_1} w_{\lambda_2 \dots \lambda_{p+1}}$ dan is

18.20) $W = \text{Rot } w$; $\tilde{m} = (-1)^p w - \beta_{p+1} + \beta \text{ Div } m$

Voor de signaturen $+++$ in V_3 geeft dit volgens (15.5,6)

18.21) $\tilde{m} = \mp (-1)^p \text{Div } m$

Voor W -scalaren en trivector-dichtheden gelden alle dezelfde overwegingen. Gradient en divergentie beide corresponderen met de uit de gewone vectoranalyse bekende gradient.

b. Rotatie covariante vector en divergentie contravariante bivector-dichtheid.

Deze rotatie en divergentie corresponderen beide met ^{de} uit de gewone vectoranalyse bekende rotatie. Voor covariante W-vectoren en contravariante bivector-dichtheden geldt hetzelfde.

c. Divergentie contravariante vector-dichtheid en rotatie covariante bivector.

Deze divergentie en rotatie corresponderen beide met de uit de gewone vectoranalyse bekende divergentie. Voor contravariante W-vector-dichtheden en covariante bivectoren geldt hetzelfde. Een meetkundige interpretatie volgt later.

§ 19. Invariante differentiaaloperatoren II: Het theorema van Stokes.

In X_q beschouwen we een enkelvoudig samenhangend deel τ_{q+1} van een X_{q+1} en zijn begrenzende X_q , τ_q . Indien de q -dimensionale elementen τ_q uitgerust worden met een inwendige oriëntering dan worden deze elementen contravariante q -vectoren. Voor een element schrijven we

$df^{x_1 \dots x_q}$ Ieder element van τ_{q+1} worde nu eveneens uitgerust met een inwendige oriëntering en wel zo, dat deze ontstaat uit de richting van binnen naar buiten gevolgd door de oriëntering van $df^{x_1 \dots x_q}$. Dan wordt dat element een contravariante $(q+1)$ -vector, die worde aangeduid met $df^{x_1 \dots x_{q+1}}$.

Zij nu $v_{x_1 \dots x_q}$ een covariant q -vectorveld gedefinieerd in τ_{q+1} en op τ_q en dat voldoet aan de volgende voorwaarden:

- $v_{x_1 \dots x_q}$ is continu in τ_{q+1} en op τ_q
- de afgeleiden $\partial_\mu v_{x_1 \dots x_q}$ die voorkomen in de uitdrukking $\partial_\mu v_{x_1 \dots x_q}$ bestaan in alle punten van τ_{q+1}
- deze afgeleiden zijn continu in alle punten van τ_{q+1} , met uitzondering van een eindig aantal discontinuïteits- X_q 's op welke een eindige sprong geoorloofd is.

Dan kan worden bewezen, dat

$$(19.1) \quad \int_{\tau_{q+1}} \partial_\mu v_{x_1 \dots x_q} df^{x_1 \dots x_{q+1}} = \int_{\tau_q} v_{x_1 \dots x_q} df^{x_1 \dots x_q}$$

Het bewijs is overbekend voor $n=3$, $q=1$ en $q=2$. Voor algemenere waarden ontstaan geen extra moeilijkheden. (verg. R.K. blz. 95).

Uit (19.1) kunnen een aantal andere vormen van het theorema van Stokes worden afgeleid. In de eerste plaats kan men natuurlijk

$\tilde{v}^{x_1 \dots x_p}, \tilde{f}_{x_1 \dots x_{p-1}}, \tilde{f}_{x_1 \dots x_p}; p = n-q$
invoeren in plaats van $v_{x_1 \dots x_q}, f^{x_1 \dots x_q}, f^{x_1 \dots x_q}$
Dan ontstaan de drie vormen:

$$(19.2) \quad p \int_{\tau_{q+1}} (\partial_\mu \tilde{v}^{x_1 \dots x_p}) \tilde{f}_{x_1 \dots x_{p-1}} = \int_{\tau_q} \tilde{v}^{x_1 \dots x_p} d\tilde{f}_{x_1 \dots x_p}$$

$$(19.3) \quad p \int_{\tau_{q+1}} \partial_\mu \tilde{v}^{x_1 \dots x_{p-1}} \tilde{f}_{x_1 \dots x_{p-1}} = \int_{\tau_q} \tilde{v}^{x_1 \dots x_p} d\tilde{f}_{x_1 \dots x_p}$$

1) Verg. R.K. p. 37; Schouten & v. Dantzig, On ordinary quantities and W-quantities, Comp. Math. 7(1940) 417-473. In deze publicatie is $\sim$ in een andere minder doeltreffende betekenis gebruikt.

$$19.4) \binom{m-q}{q+1} \int_{\tau_{q+1}} \partial_\mu \tilde{\eta} [\lambda_1, \dots, \lambda_{q+1} | \mu] d\tilde{\eta} [\lambda_1 | \lambda_2, \dots, \lambda_q] = \int_{\tau_{q+1}} \partial_\mu \tilde{\eta} [\lambda_1, \dots, \lambda_q | \rho | \lambda_1, \dots, \lambda_q] d\tilde{\eta} [\lambda_1, \dots, \lambda_q | \rho] = \int_{\tau_{q+1}} \tilde{\eta} [\lambda_1, \dots, \lambda_q] d\tilde{\eta} [\rho | \lambda_1, \dots, \lambda_q] = \tilde{\eta} [\rho | \lambda_1, \dots, \lambda_q]$$

die alle dezelfde meetkundige betekenis hebben als (19.1). Geeft men aan de elementen van $\mathcal{Z}_2$ en $\mathcal{Z}_{n+1}$ een uitwendige orientatie met dien verstande, dat de orientatie van $\mathcal{Z}_{n+1}$ ontstaat uit de orientatie van $\mathcal{Z}_2$ gevolgd door de richting van binnen naar buiten, dan ontstaan vier andere formules die van (19.1-4) alleen daardoor verschillen, dat het teken ~~overal~~ overal wordt weggelaten waar het staat en gezet wordt waar het niet staat. Ook deze vier formules hebben alle dezelfde meetkundige betekenis.

Om de integralen over $\mathcal{Z}_q$ en $\mathcal{Z}_{q+1}$ werkelijk uit te rekenen, moeten deze worden omgezet in gewone meervoudige integralen. Wij laten dit zien aan $\int_{\mathcal{Z}_n} d[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] d\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Men verdeelt de n -dimensionale ruimte op een bepaalde manier, bijv. in infinitesimale parallelepipeda volgens de coördinaathypervlakken. Dan wordt

wordt

19.5) $d f^{x_1, \dots, x_n} = n! \cdot d_1 x \dots d_n x$

waarin dx^k een vector is met de kentallen $dx^1, 0, \dots, 0$ enz. Dan is

19.6) $d\phi^{1\dots n} = dx^1 \dots dx^n$

Is dan

$$19.7) \quad \alpha_1 \partial_{x^1} + \alpha_2 \partial_{x^2} + \dots + \alpha_n \partial_{x^n} = f(x^k)$$

dan gaat de integraal over in

dan gaat de integraal over in

19.8) $\int_{\Omega} f(x^*) dx^1 \dots dx^n = \iint \dots \int f(x^*) dx^1 \dots dx^n$

die op de gewone manier als meervoudige integraal kan worden behandeld.

In X_3 hebben we de volgende gevallen
 $1. q = 2$

a. integraal van een covariante bivector over een oppervlak met inwendige oriëntatie

$$19.9) \quad \int_{\Sigma_3} \partial_{\mu} v_{\lambda\kappa} d f^{\mu\lambda\kappa} = \int_{\Sigma_3} v_{\lambda\kappa} d f^{\lambda\kappa}$$

19.10) $\int_{\tilde{\Sigma}_3} \tilde{g}_K v_{AK} d\tilde{f}^3 = \int_{\tilde{\Sigma}_2} v_{AK} d\tilde{f}_K^2$

19.11) $\int_{\tau_3}^3 \partial_\mu \tilde{m}^\mu d\tilde{f} = \int_{\tau_2}^2 \tilde{m}^\mu d\tilde{f}_\mu$

$$19.12) \quad \frac{1}{3} \int_{\bar{\epsilon}_3} \partial_\mu \tilde{\eta}^\mu d\rho^{k_1, k_2} = \int_{\bar{\epsilon}_3} \partial_\mu \tilde{\eta}^\mu d\rho^{[u|k_1, k_2]} = \int_{\bar{\epsilon}_2} \tilde{\eta}^\mu d\rho^{k_1, k_2}]$$

b. integraal van een contravariante vektordichtheid over een oppervlak met uitwendige oriëntering.

19.13) $\int_{\Sigma} [\tilde{g}_{\mu}^{\nu} \tilde{v}_{\lambda\kappa}] d\tilde{f}^{\tilde{\nu}\lambda\kappa} = \int_{\Sigma} \tilde{v}_{\lambda\kappa} d\tilde{f}^{\tilde{\nu}\lambda\kappa}$

19.14) $\int_{\Gamma_2} \partial_{\bar{\mu}} \tilde{\chi}_{\alpha} df = \int_{\Gamma_2} \tilde{\nu}_{[\mu} df_{\mu]}$

19.15) $\int_{\Gamma_3} \partial_\mu \eta^k df^\mu \quad \int_{\Gamma_2} \eta^\mu df_\mu$

19.16) $\frac{1}{3} \int_{\Sigma} \partial_\mu \eta^\mu d\tau^{\mu, \kappa, \kappa_2} = \int_{\Sigma} \partial_\mu \eta^\mu [\bar{\nu} d\tilde{\rho}^{\mu, \kappa, \kappa_2}] = \int_{\Sigma} \eta^\mu d[\bar{\nu} d\tilde{\rho}^{\mu, \kappa, \kappa_2}]$

$$2. g = 1$$

a. integraal van een covariante vector over een kromme met inwendige oriëntering

19.17)

$$\int_{\tau_2}^{\tau_1} \partial_\mu v_\lambda d f^{\mu\lambda} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} v_\lambda d f^\lambda$$

19.18)

$$\int_{\tau_2}^{\tau_1} \partial_\mu v_\lambda d \tilde{f}^{\mu\lambda} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} v_\lambda d \tilde{f}^\lambda$$

19.19)

$$\int_{\tau_2}^{\tau_1} \partial_\mu \eta^{\lambda\mu} d f_\lambda = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \eta^{\lambda\mu} d f_{\lambda\mu}$$

19.20)

$$\int_{\tau_2}^{\tau_1} \partial_\mu \eta^{[\lambda\mu]} d f^{\nu\kappa]} = \int_{\tau_2}^{\tau_1} \partial_\mu \eta^{[\lambda\nu]} d f^{\mu\kappa]} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \eta^{[\lambda\nu]} d f^{\kappa]}$$

b. integraal van een contravariante bivectordichtheid over een kromme met uitwendige oriëntering.

19.21)

$$\int_{\tau_2}^{\tau_1} \partial_\mu \tilde{v}_\lambda d f^{\mu\lambda} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{v}_\lambda d f^\lambda$$

19.22)

$$\int_{\tau_2}^{\tau_1} \partial_\mu \tilde{v}_\lambda d f_{\mu\lambda} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{v}_\lambda d f_{\lambda\mu}$$

19.23)

$$\int_{\tau_2}^{\tau_1} \partial_\mu \eta^{\lambda\mu} d f_\lambda = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \eta^{\lambda\mu} d f_{\lambda\mu}$$

19.24)

$$\int_{\tau_2}^{\tau_1} \partial_\mu \eta^{[\lambda\mu]} d f^{\nu\kappa]} = \int_{\tau_2}^{\tau_1} \partial_\mu \eta^{[\lambda\nu]} d f^{\mu\kappa]} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \eta^{[\lambda\nu]} d f^{\kappa]}$$

De integralen in (19.13-16) kunnen hydrodynamisch geïnterpreteerd worden. Zij v^λ de snelheid van een stromende vloeistof en μ zijn dichtheid, d.i. de massa per m.v. Dan is $\eta^\lambda = \mu v^\lambda$ de vectordichtheid van de stroom en $\eta^\lambda d f_\lambda$ de totale massa per tijdseenheid vloeiende door $d f_\lambda$ in de richting van de oriëntering. Dus stelt $\int_{\tau_2}^{\tau_1} \eta^\lambda d f_\lambda$ de totale massa voor die door τ_2 per tijdseenheid naar buiten stroomt. De continuïteitsvergelijking

19.25)

$$\partial_\lambda \eta^\lambda + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$$

drukt uit, dat de divergentie van de stroomdichtheid in enig punt gelijk is aan de vermindering van de dichtheid per eenheid van tijd. Bijgevolg is

19.26)

$$\int_{\tau_3} \partial_\lambda \eta^\lambda d f = - \int_{\tau_3} \frac{\partial \mu}{\partial t} d f$$

en dit is het totale verlies aan massa in τ_3 per eenheid van tijd. Het is duidelijk, dat dit verlies gelijk moet zijn aan de massa die door τ_2 naar buiten stroomt.

Is $\partial_\mu \eta^\mu = 0$ dan is de totale massa in elke τ_3 constant. Is k een kleine constante dan kan de gehele ruimte in τ_3 worden verdeeld in buizen met ondoordringbare wanden door elk waarvan de massa k stroomt per eenheid van tijd. De buis in een punt x^μ stelt bij benadering de dichtheid η/k voor en deze benadering is des te nauwkeuriger naarmate k kleiner is. De vergelijking $\partial_\mu \eta^\mu = 0$ drukt dus uit, dat de buizen van η op "infinitesimale schaal" de gehele τ_3 in τ_3 zonder gapingen vullen.

Alle integralen die in (19.1-4, 9-24) voorkomen zijn scalair of n-vector- of 1-dichtheden. Dit is ook hoofdzakelijk, omdat alleen die grootheden in verschillende punten bij elkaar opgeteld kunnen worden. Gaat men echter over tot een ondergroep van P_n dan kunnen er andere vormen van het theorema van Stokes ontstaan. Bepaalt men zich b.v. tot coördinatentransformaties met $\Delta > 0$ dan kunnen ook W-scalairen en n-vectordichtheden in verschillende punten bij elkaar opgeteld worden en naast (19.1) hebben we dan b.v. de formule

$$19.27) \quad \int_{T_{p+1}} \partial_\mu \tilde{v}_{\lambda_1 \dots \lambda_p} df^{\lambda_1 \dots \lambda_p} = \int_T \tilde{v}_{\lambda_1 \dots \lambda_p} df^{\lambda_1 \dots \lambda_p}$$

Bepalen we ons tot de groep G_n , d.w.z. werken we in een $\mathcal{E}_n$, dan kunnen alle gelijksoortige grootheden in verschillende punten bij elkaar opgeteld worden en dan gelden dus de volgende integraalstellingen:

$$a) \quad \int_{T_{p+1}} df^{\lambda_1 \dots \lambda_p} \tilde{g}_p \rightarrow \Omega = \int_T df^{\lambda_1 \dots \lambda_p} \rightarrow \Omega$$

$$b) \quad \int_{T_{p+1}} df^{\lambda_1 \dots \lambda_p} \tilde{v}_{\lambda_p} \rightarrow \Omega = \int_T df^{\lambda_1 \dots \lambda_p} \rightarrow \Omega$$

$$19.28) \quad c) \quad \int_{T_{p+1}} df^{\lambda_1 \dots \lambda_p} \tilde{v}_{\lambda_p} \rightarrow \Omega = \int_T df^{\lambda_1 \dots \lambda_p} \rightarrow \Omega$$

$$d) \quad \int_{T_{p+1}} df^{\lambda_1 \dots \lambda_p} \partial_{\lambda_p} \tilde{v}_{\lambda_p} \rightarrow \Omega = \int_T df^{\lambda_1 \dots \lambda_p} \rightarrow \Omega$$

waarin Ω een symbool met onderdrukte indices is voor de een of andere grootheid en $\rightarrow$ de een of andere operatie symbolizeert uitgevoerd op de indices $\lambda_1 \dots \lambda_p$ of $\lambda_1 \dots \lambda_p$ en de indices van Ω samengesteld uit alternaties, mengingen en overschuivingen.

Is bijvoorbeeld:

$$19.29) \quad \eta_\lambda = \partial_\mu \tilde{p}^{\mu\lambda}$$

dan hebben we in een $\mathcal{E}_3$

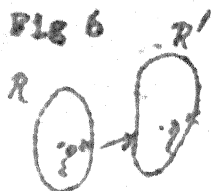
$$19.30) \quad \int_T \eta_\lambda df = \int_{T_1} \tilde{p}^{\mu\lambda} \cdot f_\mu$$

§ 20. Invariante differentiaaloperatoren III: De afgeleide van Lie.

Laat de punten van een gebied R van $\mathcal{E}_n$ onderworpen worden aan de een of andere punttransformatie

$$20.1) \quad \eta^a = f^a(\xi^a)$$

waarin de f^a analytisch zijn in R en zodanig gekozen, dat de functio-naaldeterminant $|\partial f^a / \partial \xi^a|$ aldaar $\neq 0$ is, en (20.1) een eeneendige correspondentie vastlegt tussen de punten van R en de punten van een ander gebied R'. Wij introduceren nu een nieuw coördinatenstelsel (κ') zodanig, dat ieder punt in R dezelfde coördinaten t.o.v. (κ') heeft als zijn beeld t.o.v. (κ)



Is dus

$$20.2) \quad \xi^{\kappa} = p^{\kappa}(\eta^{\kappa})$$

de omkering van (20.1) dan leidt de overgang van (κ) tot (κ') :

$$20.3) \quad \xi^{\kappa'} = \delta_{\kappa}^{\kappa'} \eta^{\kappa}(\xi^{\kappa}) ; \quad \xi^{\kappa} = f^{\kappa}(\xi^{\kappa'})$$

Dit proces van overgang van (κ) tot (κ') heet het meeslepen (to drag along) van het coördinatenstelsel (κ) door de punttransformatie (20.1).

Stel nu dat er enig veld b.v. p^{κ} gegeven is in R. We vormen dan in R' een nieuw veld, welks componenten $p^{\kappa'}$ met betrekking tot (κ') in ieder punt van R' precies dezelfde waarde hebben als p^{κ} in het beeldpunt in R. Dit proces noemen we het meeslepen van het veld p^{κ} door de punttransformatie (20.1). Dus kort:

kentallen meegesleept veld t.o.v. meegesleept coördinatenstelsel = kentallen oud veld t.o.v. oud coördinatenstelsel.

Indien R en R' punten gemeen hebben kunnen de velden p^{κ} en $p^{\kappa'}$ in die punten vergeleken worden, waartoe natuurlijk nodig is, dat hun kentallen ten opzichte van één en hetzelfde coördinatenstelsel b.v. δ^{κ} of (κ) worden berekend. Indien dan blijkt, dat $p^{\kappa} = p^{\kappa'}$ dan heet het veld P invariant t.o.v. de punttransformatie (20.1).

Wij beschouwen nu een systeem van n gewone differentiaalvergelijkingen van de vorm

$$20.4) \quad \frac{d\eta^{\kappa}}{dt} = \psi^{\kappa}(\eta^{\kappa})$$

met de onafhankelijke variabele t en de onbekende variabelen η^{κ} en met functies ψ^{κ} die analytisch zijn in het beschouwde gebied. Daarbij nemen we als beginvoorwaarden

$$20.5) \quad \eta^{\kappa} = \xi^{\kappa} \text{ voor } t = 0$$

Wordt de oplossing van deze vergelijkingen ontwikkeld in een machtreeks naar t dan ontstaat

$$20.6) \quad \eta^{\kappa} = \xi^{\kappa} + \psi^{\kappa}(\xi^{\kappa})t + \dots$$

Deze vergelijking stelt een punttransformatie $\xi^{\kappa} \rightarrow \eta^{\kappa}$ voor. Worden de ξ^{κ} door deze punttransformatie meegesleept dan zijn blijkens (20.3) de $\xi^{\kappa'}$ gegeven door de vergelijkingen

$$20.7) \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad \xi^{\kappa} &= \delta_{\kappa'}^{\kappa} \xi^{\kappa'} + \psi^{\kappa}(\xi^{\kappa'})t + \dots \\ \text{b)} \quad \xi^{\kappa'} &= \delta_{\kappa}^{\kappa'} \xi^{\kappa} - \delta_{\kappa}^{\kappa'} \psi^{\kappa}(\xi^{\kappa})t + \dots \end{aligned}$$

Differentiatie van (20.7 b) en omkering geeft indien we schrijven

$$20.8) \quad \begin{aligned} A_{\kappa'}^{\kappa} &= \delta_{\kappa'}^{\kappa} (A_{\kappa}^{\kappa} - t \partial_{\kappa} \psi^{\kappa} + \dots) \\ A_{\kappa}^{\kappa'} &= \delta_{\kappa}^{\kappa'} (A_{\kappa}^{\kappa} + t \partial_{\kappa} \psi^{\kappa} + \dots) \end{aligned}$$

Wanneer we nu in (20.6) alle hogere machten van t verwaarlozen en $\frac{d}{dt}$ schrijven in plaats van $\frac{d}{dt}$ ontstaat wat Lie noemt een infinitesimale punttransformatie:

$$20.9) \quad d\xi^{\kappa} = v^{\kappa} dt$$

Men zegt dat de eindige eenledige transformaties (20.6) door de infinitesimale transformatie (20.9) gegenereerd wordt. Bij de infinitesimale transformatie ondergaan alle punten een verplaatsing $v^{\kappa} dt$ waarbij v^{κ} natuurlijk van de ξ^{κ} afhangt. Wordt een coördinatenstelsel of een veld meegesleept door een infinitesimale transformatie

$v^{\kappa} dt$ dan zegt men dat het coördinatenstelsel of het veld over $v^{\kappa} dt$ wordt meegesleept. Het meegesleepte systeem (κ') is dan gegeven door de uit (20.7) volgende vergelijkingen

$$20.10) \quad \begin{aligned} \xi^{\kappa} &= \delta_{\kappa'}^{\kappa} \xi^{\kappa'} + v^{\kappa} dt \\ \xi^{\kappa'} &= \delta_{\kappa}^{\kappa'} \xi^{\kappa} - v^{\kappa} dt \end{aligned}$$

v^{κ} gegeven zijnde vragen we nu naar de kentallen van enig veld b.v. P_{λ}^{κ} dat over $v^{\kappa} dt$ wordt meegesleept. De kentallen in $\xi^{\kappa} + v^{\kappa} dt$ van het meegesleepte veld t.o.v. (κ') zijn dezelfde als de kentallen van P_{λ}^{κ} in ξ^{κ} t.o.v. (κ). Bijgevolg zijn de kentallen van het meegesleepte veld in $\xi^{\kappa} + v^{\kappa} dt$ t.o.v. (κ):

$$20.11) \quad \begin{aligned} A_{\lambda}^{\rho \kappa'} \delta_{\rho}^{\sigma} P_{\sigma}^{\kappa} &\stackrel{*}{=} (A_{\lambda}^{\rho} - \partial_{\lambda} v^{\rho} dt) (A_{\sigma}^{\kappa} + \partial_{\sigma} v^{\kappa} dt) P_{\rho}^{\sigma} \stackrel{*}{=} \\ &\stackrel{*}{=} P_{\lambda}^{\kappa} - P_{\rho}^{\kappa} \partial_{\lambda} v^{\rho} dt + P_{\lambda}^{\sigma} \partial_{\sigma} v^{\kappa} dt \end{aligned}$$

Om nu de kentallen van het meegesleepte veld in ξ^{κ} t.o.v. (κ) te verkrijgen moeten we natuurlijk $v^{\rho} \partial_{\rho} P_{\lambda}^{\kappa}$ aftrekken en bijgevolg zijn deze kentallen

$$20.12) \quad P_{\lambda}^{\kappa} - v^{\rho} \partial_{\rho} P_{\lambda}^{\kappa} dt - P_{\rho}^{\kappa} \partial_{\lambda} v^{\rho} dt + P_{\lambda}^{\sigma} \partial_{\sigma} v^{\kappa} dt$$

De uitdrukking

$$20.13) \quad (v^{\rho} \partial_{\rho} P_{\lambda}^{\kappa} + P_{\rho}^{\kappa} \partial_{\lambda} v^{\rho} - P_{\lambda}^{\sigma} \partial_{\sigma} v^{\kappa}) dt$$

heet de Lie differentiaal van P_{λ}^{κ} t.o.v. $v^{\kappa} dt$. Dus, wordt een veld meegesleept over $v^{\kappa} dt$ dan is de toename van het veld in enig vast punt ξ^{κ} gelijk aan de negatieve Lie differentiaal van het veld aldaar.

Blijkbaar is de Lie differentiaal, zijnde het verschil van twee velden een invariant.

De uitdrukking

$$20.14) \quad \mathcal{L} P_{\lambda}^{\kappa} \stackrel{\text{def}}{=} v^{\rho} \partial_{\rho} P_{\lambda}^{\kappa} + P_{\rho}^{\kappa} \partial_{\lambda} v^{\rho} - P_{\lambda}^{\sigma} \partial_{\sigma} v^{\kappa}$$

heet de Lie afgeleide van P_{λ}^{κ} t.o.v. het veld v^{κ} . Voor affinoren van hogere valentie geldt een overeenkomstige formule, voor elke index komt er een term bij, + voor een covariante en - voor een contravariante index. Blijkbaar gelden de volgende regels:

- de Lie afgeleide van een som is de som van de Lie afgeleiden der termen;
- de Lie afgeleide van een vouwing is de vouwing van de Lie afgeleide;
- voor de Lie afgeleide van een product of overschuiving geldt de regel van Leibniz;

- d. de Lie afgeleide van v^κ t.o.v. zichzelf is nul;
e. de Lie afgeleide van ρ_λ^κ is nul.

Wij geven hier enige voorbeelden:

Scalar:

$$20.15) \quad \mathcal{L}_v S = v^\mu \partial_\mu S$$

Vectoren:

$$20.16) \quad a) \quad \mathcal{L}_v u^\kappa = v^\mu \partial_\mu u^\kappa - u^\mu \partial_\mu v^\kappa$$

$$b) \quad \mathcal{L}_v u_\lambda = v^\mu \partial_\mu u_\lambda + u_\mu \partial_\lambda v^\mu$$

p-vectoren:

$$20.17) \quad a) \quad \mathcal{L}_v u^{\kappa_1 \dots \kappa_r} = v^\mu \partial_\mu u^{\kappa_1 \dots \kappa_r} - p u^{\lambda [\kappa_1 \dots \kappa_r} \partial_\lambda v^{\mu]}$$

$$b) \quad \mathcal{L}_v w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} = v^\mu \partial_\mu w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} + p w_{[\lambda_1 \dots \lambda_p} \partial_{\lambda]} v^\mu$$

De Lie afgeleiden van dichtheden verkrijgt men het gemakkelijkst als volgt. Uit (20.17 b) volgt:

$$20.18) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_v w_{\lambda_1 \dots \lambda_n} &= v^\mu \partial_\mu w_{\lambda_1 \dots \lambda_n} + n w_{[\lambda_1 \dots \lambda_n} \partial_{\lambda]} v^\mu \\ &= v^\mu \partial_\mu w_{\lambda_1 \dots \lambda_n} + w_{\lambda_1 \dots \lambda_n} \partial_\mu v^\mu \\ &= \partial_\mu (v^\mu w_{\lambda_1 \dots \lambda_n}) \end{aligned}$$

Nu transformeert zich $w_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ als een scalaire s ; dichtheid van het gewicht $+1$. Is dus $\tilde{q}$ een dergelijke dichtheid, dan is ook:

$$20.19) \quad \mathcal{L}_v \tilde{q} = \partial_\mu \tilde{q} v^\mu = \text{Div}(\tilde{q} v)$$

Iedere gewone scalaire dichtheid q van het gewicht $+1$ is het product van $\tilde{q}$ (verg. § 14) met een $\tilde{q}$. Aangezien het kentel van $\tilde{q}$ alleen de waarden ± 1 aanneemt, is dus:

$$20.20) \quad \mathcal{L}_v q = \partial_\mu q v^\mu = \text{Div}(qv)$$

Hieruit volgt voor een affinordichtheid van het gewicht k b.v.:

$$20.21) \quad \mathcal{L}_v \rho^{\kappa\lambda}_{\dots\nu} = v^\mu \partial_\mu \rho^{\kappa\lambda}_{\dots\nu} + \rho^{\kappa\lambda}_{\dots\rho} \partial_\nu v^\rho - \rho^{\kappa\lambda}_{\dots\nu} \partial_\sigma v^\sigma - k \rho^{\kappa\lambda}_{\dots\nu} \partial_\mu v^\mu$$

en precies een dergelijke formule geldt voor affinor- s -dichtheden. De Lie afgeleiden van $f^{\kappa_1 \dots \kappa_n}$ en $\rho_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ zijn natuurlijk nul.

Indien voor enig veld de Lie afgeleide t.o.v. v^κ in alle punten nul is, heet het veld absoluut invariant t.o.v. v^κ . Een absoluut invariant veld heeft de volgende eigenschappen:

a. de veldwaarde in enig vast punt verandert niet, indien het veld wordt meegesleept door een der transformaties van de eenledige groep die door de infinitesimale transformatie $v^\kappa \partial_\kappa$ wordt gegenereerd.

b. de kentallen van het veld in ξ^κ t.o.v. (κ) zijn gelijk aan de kentallen van hetzelfde veld in ξ'^κ t.o.v. het over $v^\kappa \partial_\kappa$ meegesleepte coördinatensysteem κ' .

Blijkbaar zijn sommen, producten en overschuivingen van abso-

luut invariante velden eveneens absoluut invariant (altijd t.o.v. hetzelfde veld v^κ !)

Gewoonlijk gaat de invariantie van een veld t.o.v. v^κ verloren als v^κ met een niet constanten scalar σ wordt vermenigvuldigd. Dat betekent dat het veld niet invariant is bij alle transformaties die de stroomlijnen van v^κ invariant laten maar alleen bij die door v^κ worden gegeneerd. Indien de Lie afgeleide van een veld t.o.v. σv^κ nul is voor iedere waarde van σ , dan heet het veld absoluut invariant t.o.v. de stroomlijnen van v^κ . Dit is een strengere eis en er moet dus een voorwaarde bij komen. Uit (20.17 b) volgt, dat deze bijkomende voorwaarde voor een covariante p-vector luidt:

$$20.22) \quad v^\mu \nabla_\mu \lambda_1 \dots \lambda_p = 0$$

De voorwaarde voor een W-p-vector heeft dezelfde vorm. Daaruit leidt men af dat de bijkomende voorwaarde voor een p-vectordichtheid van het gewicht + 1 luidt:

$$20.23) \quad \nabla_\mu [\lambda_1 \dots \lambda_p v^\mu] = 0$$

en precies een dergelijke voorwaarde voor een p-vector- Δ -dichtheid. Hieruit volgt, dat een scalar (W-scalar) of een n-vectordichtheid (Δ -dichtheid) van het gewicht + 1 die absoluut invariant is t.o.v. v^κ ook altijd de stroomlijnvariantie heeft en dat een n-vector (W-n-vector) of scalaire dichtheid (Δ -dichtheid) van het gewicht + 1 nooit deze sterkere invariantie kunnen bezitten.

§ 21 Invariante differentiaaloperatoren IV: de Lagrange afgeleide.

Zij $\phi_A, A=1, \dots, N$ een stel functies van de coördinaten x^κ . Deze kunnen scalaren zijn of kentallen van het een of andere object met een bepaalde transformatiewijze bijvoorbeeld een affinor ϕ_A . Dus is A niets als een soort verzamelindex. We zien van deze eventuele betekenissen van de ϕ_A voorlopig geheel af en zullen ook de x^κ voorlopig niet transformeren. Ook laten we nu de index A maar helemaal weg en verstaan onder $\phi, \partial_\mu \phi, \partial_\mu \partial_\nu \phi, \dots$ enz. de ϕ_A en eerste en verdere afgeleiden van de ϕ_A naar de x^κ .

Zij nu $\mathcal{L}$ een functie van de ϕ de $\partial_\mu \phi$ enz. tot een zekere eindige orde. Dan is $\mathcal{L}$ nu deze functies tenslotte een functie van de x^κ over een bepaald gebied van X_m . Schrijf nu de integraal van $\mathcal{L}$ over een bepaald gebied $\mathcal{V}$ van X_m naar alle voorkomende functies analytisch zijn in de vorm

$$21.1) \quad \int_{\mathcal{V}} \mathcal{L} dx^1 \dots dx^n \quad (n \geq 1, (g, \sigma))$$

Dit is een gewone meervoudige integraal maar voor het gemak schrijven we

De ϕ mogen nu een variatie $\delta \phi$ ondergaan en wel zo, dat de variaties der ϕ en die van alle in $\mathcal{L}$ voorkomende afgeleiden der ϕ op de begrenzing $\mathcal{V}_m$ van $\mathcal{V}$ nul zijn. Dan geldt voor de variatie van $\mathcal{L}$

$$21.2) \quad \delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \partial_\mu \phi + \dots \quad 1)$$

en dientengevolge

$$21.3) \quad \delta \int_{\mathcal{V}} \mathcal{L} dx^1 \dots dx^n = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \partial_\mu \phi + \dots \right) dx^1 \dots dx^n$$

1) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \partial_\mu \phi$ staat dus voor $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \phi_{,\mu}$ automatisch te sommeren over μ , enz.

Partiele integratie en toepassing van het theorema van Stokes leren, 21.4)

$$\int_{\mathcal{V}} L d\mathcal{V}^1 \dots d\mathcal{V}^n = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathcal{V}^1} d\mathcal{V}^1 + \frac{\partial L}{\partial \mathcal{V}^2} d\mathcal{V}^2 + \dots \right) d\mathcal{V}^1 \dots d\mathcal{V}^n = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathcal{V}^1} d\mathcal{V}^1 - \frac{\partial L}{\partial \mathcal{V}^2} d\mathcal{V}^2 + \frac{\partial L}{\partial \mathcal{V}^3} d\mathcal{V}^3 - \dots \right) d\mathcal{V}^1 \dots d\mathcal{V}^n$$

endat immers $d\mathcal{V}^1, d\mathcal{V}^2, \dots$ alle op $\mathcal{V}^{n-1}$ nul zijn. Wij gebruiken hier (19.3) voor $p=1, q=n-1$:

$$21.5) \quad \int_{\mathcal{V}} \partial_\mu \eta^\mu d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}^{n-1}} \eta^\mu d\mathcal{V}_\mu^{\text{van}}$$

waarin η^μ en contravariante vektordichtheid voor het gewicht +1 is en de vraag zou kunnen rijzen of dat nu wel mag endat we over de transformatie van $\frac{\partial L}{\partial \mathcal{V}^\mu}$ niets verandersteld hebben. Nu geldt echter (21.5) ten opzichte van elk coördinatenstelsel en dus ook t.o.v. het stelsel (κ) dat we uitdrukkelijk vastgehouden hebben. (21.5) is wel invariant bij coördinatentransformaties mits η^μ zich op de juiste wijze transformeert, maar we maken hier van die invariantie geen gebruik en (21.5) blijft t.o. van (κ) altijd waar wat η^μ ook is. De invariantie kan verloren gaan als η^μ niet net een vektordichtheid is, maar die kan ons hier niet schelen als (21.5) maar t.o. van (κ) waar blijft.

Men schrijft nu

$$[L] = \frac{\partial L}{\partial \mathcal{V}^1} - \partial_1 \frac{\partial L}{\partial \mathcal{V}^2} + \partial_1 \partial_2 \frac{\partial L}{\partial \mathcal{V}^3} - \dots$$

21.6)

en noemt de $[L]$ de Lagrange afgeleide van L t.o.v. de $\mathcal{V}$. $[L]$ draagt natuurlijk in werkelijkheid evenveel indices als $\mathcal{V}$ maar ook deze indices laten we hier weg. Is $[L] = 0$, dan verdwijnt de variatie van den integraal (21.1) voor iedere keuze van $\mathcal{V}$ mits aan de randvoorwaarden voldaan is en de integraal zelf neemt dus een extreme waarde aan.

De vergelijking $[L] = 0$ heet de vergelijking van Lagrange in den niet invarianten vorm. Dit type komt bijv. in de klassieke mechanica voor, de $\mathcal{V}^\mu$ reduceren zich tot t en t wordt niet getransformeerd.

Stel nu eens dat $\mathcal{V}$ en affinor is, bijv. een covariante affinor $P_{\mu\kappa}$ en dat L een scalaire dichtheid van het gewicht +1 is. Dat betekent dat indien men L , nu $\mathcal{K}$ geschreven, uitrekent voor (κ) dus $\mathcal{K}[\kappa]$ bepaalt en volgens dezelfde rekenregel evenzo $\mathcal{K}[\kappa']$ bepaalt uit $P_{\mu\kappa}, \partial_\mu P_{\mu\kappa}, \partial_\mu \partial_\mu P_{\mu\kappa}, \dots$ blijkt dat

$$21.7) \quad \mathcal{K}[\kappa'] = \Delta^{-1} \mathcal{K}[\kappa]$$

Een heel eenvoudig voorbeeld is $\mathcal{K} = \sqrt{\text{Det}(P_{\mu\kappa})}$. Andere voorbeelden volgen later.

Nu wordt de integraal (21.1) wel invariant voor coördinatentransformaties en het vormen van de Lagrange afgeleide is nu een invariant proces geworden.

De vergelijking $[K] = 0$ heet de vergelijking van Lagrange in de invariante vorm. Dit type komt bijv. in de relativiteitstheorie voor.

Is $\mathcal{V}$ een affinor en $\mathcal{K}$ een scalaire dichtheid van het gewicht +1, dan kan men een zeer belangrijke betrekking afleiden tussen $\mathcal{V}$ en hun eerste afgeleiden.

We onderstellen daartoe dat de variatie $d\mathcal{V}$ ontstaat door het $\mathcal{V}$ veld mee te slepen over $\mathcal{V}^\mu d\mathcal{V}^\mu$. Dan is $d\mathcal{V}$ de negatieve Lie differentiaal van $\mathcal{V}$. Om gecompliceerde formules te vermijden nemen we voor $\mathcal{V}$ weer

Voor hogere valenties gaat het precies eender en er treden geen extra moeilijkheden op. Dan hebben we

$$21.8) \quad \frac{d}{dt} P_{\lambda\kappa} = -v^\mu \partial_\mu P_{\lambda\kappa} dt - P_{\mu\kappa} \partial_\lambda v^\mu dt - P_{\lambda\mu} \partial_\kappa v^\mu dt$$

en het meegesleepte veld is

$$21.9) \quad \dot{P}_{\lambda\kappa} = P_{\lambda\kappa} - v^\mu \partial_\mu P_{\lambda\kappa} dt - P_{\mu\kappa} \partial_\lambda v^\mu dt - P_{\lambda\mu} \partial_\kappa v^\mu dt$$

Bijgevolg is

$$21.10) \quad \partial_\nu \dot{P}_{\lambda\kappa} = \partial_\nu P_{\lambda\kappa} - (\partial_\lambda v^\mu) \partial_\mu P_{\lambda\kappa} dt - v^\mu \partial_\nu \partial_\mu P_{\lambda\kappa} dt - (\partial_\nu P_{\mu\kappa}) \partial_\lambda v^\mu dt - P_{\mu\kappa} \partial_\nu \partial_\lambda v^\mu dt - (\partial_\nu P_{\lambda\mu}) \partial_\kappa v^\mu dt - P_{\lambda\mu} \partial_\nu \partial_\kappa v^\mu dt$$

en daaruit volgt dat $\dot{P}_{\lambda\kappa}$ en $\partial_\nu \dot{P}_{\lambda\kappa}$ en $\partial_\nu \partial_\lambda v^\mu$ nul zijn. Voor hogere afgeleiden van de $P_{\lambda\kappa}$ gaat het net zo. Aan de randvoorwaarden is dus voldaan als de v^μ en hun afgeleiden tot een voldoende hoge orde nul zijn op $\mathcal{L}_\infty$.

2 Bij substitutie van (21.8) in (21.4), rekening houdende met (w1.6) verkrijgt men

$$21.11) \quad \int_{\mathcal{L}_\infty} K d\xi^1 \dots d\xi^n = - \int_{\mathcal{L}_\infty} [K]^{\lambda\kappa} (v^\mu \partial_\mu P_{\lambda\kappa} + P_{\mu\kappa} \partial_\lambda v^\mu + P_{\lambda\mu} \partial_\kappa v^\mu) d\xi^1 \dots d\xi^n \\ - \int_{\mathcal{L}_\infty} [K]^{\lambda\kappa} (\partial_\lambda P_{\mu\kappa} - \partial_\mu P_{\lambda\kappa} - \partial_\kappa P_{\lambda\mu}) - P_{\mu\kappa} \partial_\lambda [K]^{\lambda\kappa} - P_{\lambda\mu} \partial_\kappa [K]^{\lambda\kappa} d\xi^1 \dots d\xi^n$$

waarin, nu de indices in $[K]$ indices moet dragen: weer ingevoerd zijn, natuurlijk

$$21.11) \quad [K]^{\lambda\kappa} = \frac{\partial K}{\partial P_{\lambda\kappa}} - \partial_\mu \frac{\partial K}{\partial (\partial_\mu P_{\lambda\kappa})}$$

De variatie (w1.11) moet nu echter beslist nul zijn, immers het meegesleepte veld heeft t.o. van (κ') precies dezelfde kentallen als het oude veld t.o. van (κ) en de integralen voor nieuw veld en oud veld zijn dus kennelijk gelijk. Daaruit volgt dat

$$21.12) \quad [K]^{\lambda\kappa} (P_{\mu\kappa} - \partial_\lambda P_{\mu\kappa} - \partial_\kappa P_{\lambda\mu}) - P_{\mu\kappa} \partial_\lambda [K]^{\lambda\kappa} - P_{\lambda\mu} \partial_\kappa [K]^{\lambda\kappa} = 0$$

Dese formule krijgt een bijzondere betekenis in de relativiteitstheorie.

§ 22. Anholonome coördinatenstelsels in X_n

Als we uitgaan van een toegelaten coördinatenstelsel $\xi^{\lambda'}$ krijgen we altijd covariante maatvectoren $e_{\lambda'}$, wier rotaties nul zijn. Blijkens (17.3 b) zijn de $e_{\lambda'}$ immers gradienten. Nu is het dikwijls gemakkelijk in iedere lokale $\mathcal{L}_n$ van X_n een geheel willekeurig stelsel van co- en contravariante maatvectoren te introduceren, $\tilde{e}^{\lambda'}, \tilde{e}_{\lambda'}, \tilde{e}^{\lambda}, \tilde{e}_{\lambda}$, die alleen aan de voorwaarde voldoen dat hun kentallen analytische functies der $\xi^{\lambda'}$ zijn en dat

$$22.1) \quad \tilde{e}_{\lambda'} \tilde{e}^{\lambda'} = \delta_{\lambda'}^{\lambda'}, \quad \tilde{e}_{\lambda'} \tilde{e}^{\lambda} = A_{\lambda'}^{\lambda}; \quad \lambda, \lambda' = 1, \dots, n$$

Dan zijn de $\tilde{e}_{\lambda'}$ in het algemeen geen gradientvectoren en zij behoren dus niet bij enig coördinatenstelsel $\xi^{\lambda'}$ in de tot dusver gebruikelijke zin. Men noemt nu zo'n stelsel van maatvectoren

gedefinieerd over X_n of een deel van X_n een anholonoom coördinatenstelsel, en de kentallen van enig object t.o. van een zodanig stelsel anholonome kentallen F

$$22.2) \quad A_{\lambda}^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \xi^{\lambda} \xi^{\mu} = \xi^{\lambda} \xi^{\mu} ; \quad A_{\lambda}^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \xi^{\mu} = \xi^{\mu}$$

Dan zijn de anholonome kentallen van bijv. P^{μ}_{λ}

$$22.3) \quad P^{\mu}_{\lambda} = A_{\lambda}^{\mu} P^{\mu}_{\mu}$$

De anholonome kentallen van $d\xi^{\mu}$ zijn

$$22.4) \quad (d\xi^{\mu})^{\lambda} = A_{\lambda}^{\mu} d\xi^{\mu}$$

maar men mag hier niet $d\xi^{\mu}$ schrijven omdat $A_{\lambda}^{\mu} d\xi^{\mu}$ geen volledige differentiaal is en ξ^{μ} dus niet bestaat. In plaats van ∂_{μ} hebben we in anholonome coördinaten de operator

$$22.5) \quad \partial_{\lambda} \equiv A_{\lambda}^{\mu} \partial_{\mu}$$

De gradient van een scalar p wordt dus

$$22.6) \quad w_{\lambda} = \partial_{\lambda} p$$

Maar voor de rotatie van een vector mag men niet $\partial_{\lambda} w_{\mu}$ schrijven, immers

$$22.7) \quad \partial_{\lambda} w_{\mu} = A_{\lambda}^{\alpha} \partial_{\alpha} w_{\mu} = A_{\lambda}^{\alpha} \partial_{\mu} w_{\alpha} + (A_{\lambda}^{\alpha} \partial_{\mu} A_{\alpha}^{\mu}) w_{\lambda} = + A_{\lambda}^{\alpha} \partial_{\mu} w_{\alpha} - \Omega_{\lambda}^{\mu} w_{\mu}$$

waar

$$22.8) \quad \Omega_{\lambda}^{\mu} \equiv A_{\lambda}^{\alpha} \partial_{\mu} A_{\alpha}^{\mu}$$

Ω_{λ}^{μ} heet het anholonomiteitsobject zijn kentallen zijn nul ten opzichte van alle holonome en niet allen gelijk nul ten opzichte van alle anholonome coördinatenstelsels.

Men bewijst gemakkelijk dat

$$22.9) \quad \partial_{\lambda} w_{\mu_1 \dots \mu_r} = A_{\lambda}^{\alpha} \partial_{\alpha} w_{\mu_1 \dots \mu_r} - r \Omega_{\lambda}^{\mu} w_{\mu \mu_1 \dots \mu_r}$$

en

$$22.10) \quad \partial_{\lambda} \eta^{\mu} = A^{\mu}_{\lambda} \partial_{\mu} \eta^{\mu} - \Omega_{\lambda}^{\mu} \eta^{\mu}$$

(22.10) te bewijzen is een goede oefening, (22.9) vergt wat meer schrijfwerk. Een zeer eenvoudig bewijs van (22.7) en (22.10) volgt later. Anholonome stelsels zijn van veel belang voor de mechanica.

V De meetkunde in een X met een gegeven overbrenging.

§ 23 Overbrengingen in X_n

De lokale ξ^{μ} in een X zijn geheel onafhankelijk. Tussen grootheden in verschillende lokale ξ^{μ} bestaan geen betrekkingen. Nu kan men zulk een betrekking introduceren door een voorschrift te definiëren

† De overbrenging van holonome (d.i. y-coörd.) op anholonome coördinaten wordt kenmerkend door de intermediäre kentallen van A_{λ}^{μ} .

voor de overbrenging van grootheden van de locale $\mathcal{L}_n$ in $\mathcal{E}^K$ naar de locale $\mathcal{L}_n$ in $\mathcal{E}^K + d\mathcal{E}^K$. Zulk een voorschrift, indien gegeven voor alle punten in alle richtingen, heet een overbrenging of ook wel een pseudoparallel verplaatsing in $\mathcal{L}_n$. In een $\mathcal{L}_n$ is een overbrenging a priori gegeven, namelijk de gewone parallelle verplaatsing.

Is een veld v^k gegeven, en v^k de waarde in $\mathcal{E}^K$, dan is de waarde in $\mathcal{E}^K + d\mathcal{E}^K$ gelijk $v^k + dv^k = v^k + d\mathcal{E}^K \partial_{\mathcal{E}^K} v^k$. Zij nu $v^{k'} + dv^{k'}$ de waarde van de naar $\mathcal{E}^{K'} + d\mathcal{E}^{K'}$ volgens het voorschrift overgebrachte vector, dan is

$$23.1) \quad v^{k'} + dv^{k'} = (A_{\kappa}^{k'} + dA_{\kappa}^{k'}) (v^{\kappa} + dv^{\kappa}) = A_{\kappa}^{k'} v^{\kappa} + A_{\kappa}^{k'} dv^{\kappa} + v^{\kappa} dA_{\kappa}^{k'}$$

en bijgevolg

$$23.2) \quad dv^{k'} = A_{\kappa}^{k'} dv^{\kappa} + v^{\kappa} dA_{\kappa}^{k'}$$

Nu weten we echter dat

$$23.3) \quad dv^{k'} = d(A_{\kappa}^{k'} v^{\kappa}) = A_{\kappa}^{k'} dv^{\kappa} + v^{\kappa} dA_{\kappa}^{k'}$$

en daaruit volgt dat

$$23.4) \quad dv^{k'} - d^*v^{k'} = A_{\kappa}^{k'} (dv^{\kappa} - d^*v^{\kappa})$$

Bijgevolg

$$23.5) \quad \delta v^{\kappa} \stackrel{\text{def}}{=} dv^{\kappa} - d^*v^{\kappa}$$

een contravariante vector. Deze vector heet de covariante differentiaal van v^{κ} t.o. van de gegeven overbrenging. Wordt het locale coördinatenstelsel in de $\mathcal{L}_n$ van $\mathcal{E}^K$ pseudoparallel verplaatst naar $\mathcal{E}^{K'} + d\mathcal{E}^{K'}$ dan is δv^{κ} de differentiaal t.o. van dat coördinatenstelsel. M.a.w. δv^{κ} is de differentiaal van het standpunt gezien van een waarnemer wiens coördinatenstelsel pseudoparallel wordt verplaatst.

Men verlangt nu enige orde te brengen in de overbrenging van allerlei verschillende grootheden en bepaalt zich derhalve tot lineaire overbrengingen, d.w. overbrengingen voldoende aan de volgende voorwaarden:

1. Is Φ een grootheid (indices weggelaten) dan is $\delta\Phi$ een grootheid van hetzelfde soort;
2. $\delta(\Phi + \Psi) = \delta\Phi + \delta\Psi$;
3. $\delta(\Phi\Psi) = (\delta\Phi)\Psi + \Phi\delta\Psi$ (regel van Leibniz);
4. $\delta\Phi$ is lineair homogeen in de $d\mathcal{E}^K$;
5. de regel van Leibniz geldt ook voor overschuivingen;
6. de covariante differentiaal van een scalar of W-scalar is identiek met de gewone differentiaal.

Een $\mathcal{L}_n$ met een lineaire overbrenging heet $\mathcal{L}_n$

Uit (1), (2) en (4) volgt dat de covariante differentiaal van de vorm

$$23.6) \quad \delta v^{\kappa} = dv^{\kappa} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} v^{\lambda} d\mathcal{E}^{\mu} = (\partial_{\mu} v^{\kappa} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} v^{\lambda}) d\mathcal{E}^{\mu}$$

moet hebben, waar de $\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}$ n^3 parameters zijn, die zich als volgt transformeren

$$23.7) \quad \begin{aligned} \Gamma_{\mu'\lambda'}^{\kappa'} &= A_{\kappa\mu}^{\kappa'} A_{\lambda\lambda'}^{\mu} \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} - A_{\mu'\lambda'}^{\mu} \partial_{\mu} A_{\lambda}^{\kappa'} \\ &= A_{\kappa\mu}^{\kappa'} A_{\lambda\lambda'}^{\mu} \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} + A_{\lambda}^{\kappa'} \partial_{\mu'} A_{\lambda'}^{\mu} \end{aligned}$$

De $\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}$ vormen dus een geometrisch object maar geen geometrische grootheid

Uit

23.13)

volgt dat

23.14)

$$\delta w_{\lambda_1 \dots \lambda_n} = dw_{\lambda_1 \dots \lambda_n} - n \Gamma_{\mu}^{\rho} [w_{\lambda_1 \dots \lambda_{n-1} \rho}] d\xi^{\mu}$$

$$\delta^* w_{\lambda_1 \dots \lambda_n} = n \Gamma_{\mu}^{\rho} [w_{\lambda_1 \dots \lambda_{n-1} \rho}] d\xi^{\mu} = \Gamma_{\mu}^{\rho} w_{\lambda_1 \dots \lambda_n} d\xi^{\mu}$$

en daar $w_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ kent al van een scalaire Δ -dichtheid van het gewicht +1 is voor een dergelijke dichtheid

23.15)

$$\delta \tilde{w} = d\tilde{w} - \Gamma_{\mu}^{\rho} \tilde{w} d\xi^{\mu}$$

Laat men alleen transformaties met $\Delta = +1$ toe, dan volgt dus voor een gewone dichtheid met gewicht +1

23.16)

$$\delta w = dw - \Gamma_{\mu}^{\rho} w d\xi^{\mu}$$

en aangezien δ een invariante operator is, geldt deze formule ook algemeen. Hieruit volgt bijv. voor ϕ^{λ}

23.17)

$$\delta \phi^{\lambda} = d\phi^{\lambda} + [\Gamma_{\mu}^{\rho} \phi^{\rho} - \Gamma_{\rho}^{\mu} \phi^{\lambda} - \delta \Gamma_{\rho}^{\mu} \phi^{\rho}] d\xi^{\mu}$$

en precies zo'n formule voor Δ -dichtheden.

Iedere covariante differentiaal is de overschuiving van $d\xi^{\mu}$ met een andere grootheid, die het covariante differentiaalquotient wordt genoemd. Men gebruikt de notatie

23.18)

$$\delta \Phi = d\xi^{\mu} \nabla_{\mu} \Phi \quad (\text{indices weggelaten})$$

dus, bijv.:

23.19)

$$\nabla_{\mu} v^{\lambda} = \partial_{\mu} v^{\lambda} + \Gamma_{\mu}^{\lambda} v^{\rho}$$

$$\nabla_{\mu} w_{\lambda} = \partial_{\mu} w_{\lambda} - \Gamma_{\mu}^{\rho} w_{\rho}$$

Uit (23.7) volgt dat

23.20)

$$S_{\mu\lambda}^{\rho} = \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}$$

een affinor is. Is $S_{\mu\lambda}^{\rho}$ een A_n is,

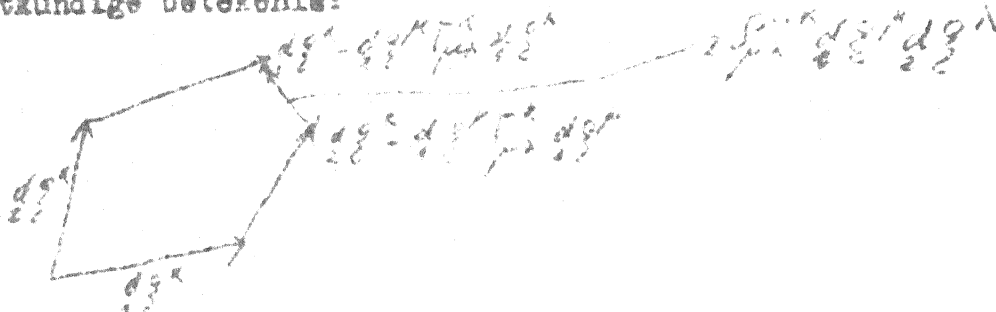
$S_{\mu\lambda}^{\rho} = 0$ dan heet de overbrenging symmetrisch

23.21)

$$S_{\mu\lambda}^{\rho} = S_{\lambda\mu}^{\rho}$$

dan heet de overbrenging halfsymmetrisch

Meetkundige betekenis:



Verplaat $d\xi^{\mu}$ pseudoparallel langs ξ^{λ} en omgekeerd. De sluitvector verdwijnt dan en alleen dan altijd wanneer $S_{\mu\lambda}^{\rho} = 0$. Er bestaan dan "infinitesimale parallelogrammen" in elke stand. Bij halfsymmetrische overbrengingen bestaat er alleen

infinitesimale parallelogrammen wier vlak in de $\mathcal{L}_{n-1}$ van $\mathcal{L}$ ligt.
In een A_n kan in alle invariante differentiaaloperaties in § 18 de ∂_μ
vervangen worden door $\tilde{\partial}_\mu$, bijvoorbeeld

$$23.22) \quad \partial_\mu w_\lambda = \tilde{\partial}_\mu w_\lambda - [\tilde{\mu}^\lambda] w_\kappa = \partial_\mu w_\lambda$$

$$23.23) \quad \partial_\mu \eta^\lambda = \tilde{\partial}_\mu \eta^\lambda + [\tilde{\mu}^\lambda] \eta^\lambda - [\tilde{\lambda}^\mu] \eta^\lambda = \partial_\mu \eta^\lambda$$

Hetzelfde geldt voor de Lie-afgeleide in § 20.

$$23.24) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_v P^\lambda_\mu &= v^\lambda \partial_\mu P^\lambda_\mu + P^\lambda_\rho \partial_\lambda v^\rho - P^\lambda_\mu \partial_\rho v^\rho + P^\lambda_\mu \partial_\rho v^\rho \\ &= v^\lambda \partial_\mu P^\lambda_\mu + P^\lambda_\rho \partial_\lambda v^\rho - P^\lambda_\mu \partial_\rho v^\rho + P^\lambda_\mu \partial_\rho v^\rho \end{aligned}$$

(reken dit na)

Hetzelfde geldt ook nog voor de identiteiten van de vorm (21.12) voor de Lagrange afgeleide:

$$23.125) \quad [\tilde{\mathcal{L}}]^\lambda{}_\mu (\partial_\mu P^\lambda_\mu - P^\lambda_\mu \partial_\mu - P^\lambda_\mu \partial_\mu) - P^\lambda_\mu \partial_\lambda [\tilde{\mathcal{L}}]^\lambda{}_\mu - P^\lambda_\mu \partial_\lambda [\tilde{\mathcal{L}}]^\lambda{}_\mu = 0$$

(reken dit na)

Maar dit alles is alleen waar in A_n . In een $\mathcal{L}_n$ komen er correctie- termen met $S_{\mu\lambda}^{\lambda\kappa}$, bijv.

$$23.26) \quad \partial_\mu w_\lambda = \tilde{\partial}_\mu w_\lambda - S_{\mu\lambda}^{\lambda\kappa} w_\kappa$$

$$23.27) \quad \partial_\mu \eta^\lambda = \tilde{\partial}_\mu \eta^\lambda - 2 S_{\mu\lambda}^{\lambda\kappa} \eta^\lambda$$

§ 24. Geodetische lijnen in $\mathcal{L}_n$

21j

24.1)

$$\dot{z}^\lambda = \dot{z}^\lambda / \lambda$$

de parametervorm van een kromme in $\mathcal{L}_n$. $\frac{dz^\lambda}{d\lambda}$ is een tangentiële vector. De kromme is geodetisch als $\frac{dz^\lambda}{d\lambda}$ aan zichzelf parallel blijft, dus

$$24.2) \quad \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dz^\lambda}{d\lambda} \right) = \lambda(z) \frac{dz^\lambda}{d\lambda}$$

Men kan een andere parameter t invoeren zo dat

$$24.3) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{dz^\lambda}{dt} \right) = 0$$

Daarvoor is n.e.v. dat

$$24.4) \quad \frac{d^2 \lambda}{dt^2} - \lambda(z) \frac{d\lambda}{dt} = 0$$

De algemene oplossing heeft de vorm

$$t = C_1 \int e^{\int \lambda(z) dz} dz + C_2$$

24.5)

t is dus op een lineaire transformatie met constante coëfficiënten na bepaald en heet natuurlijke parameter. Gevolg: stukken op één geodetische lijn hebben een invariante langteverhouding. Verandering van C_2 verschaft

het nulpunt van ϵ , verandering van C_i verandert de "maat". Stukken van verschillende geodetische lijnen kunnen natuurlijk niet door elkaar gemeten worden.

Uit (24.3) volgt dat $S_{\mu\nu}^{\kappa}$ de geodetische lijnen niet beïnvloedt.

§ 25. Normaalcoördinaten in A_n

We bewijzen dat er in een A_n altijd een coördinatenstelsel (κ') bestaat zo dat $\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} = 0$ in één bepaald gegeven punt P^{κ} .

Zij

25.1)

$$f^{\kappa} = f^{\kappa}(x_1, \dots, x_n)$$

een parametervoorstelling van ∞^n contravariante vectoren in $\mathcal{S}^{\kappa}$ zodanig dat er in elke richting juist één ligt.

Op de geodetische lijnen door f^{κ} kiezen we nu een natuurlijke parameter z , zo dat voor iedere lijn κ in $\mathcal{S}^{\kappa}$ en

25.2)

$$\frac{dz^{\kappa}}{dz} = f^{\kappa}$$

Op iedere geodetische lijn geldt

25.3)

$$\frac{d^2 z^{\kappa}}{dz^2} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} \frac{dz^{\mu}}{dz} \frac{dz^{\lambda}}{dz} = 0$$

Door differentiatie krijgt men een ∞ reeks van vergelijkingen waaruit de waarden van alle afgeleiden der z^{κ} naar z voor $z=0$ kunnen worden berekend. Vervolgens kan men dan $\mathcal{S}^{\kappa}$ ontwikkelen in een machtreeks

25.4)

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{\kappa} &= \mathcal{S}_0^{\kappa} + \left(\frac{dz^{\kappa}}{dz}\right)_{z=0} z + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 z^{\kappa}}{dz^2}\right)_{z=0} z^2 + \dots \\ &= \mathcal{S}_0^{\kappa} + f^{\kappa} z - \frac{1}{2} \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} (f^{\mu} f^{\lambda}) z^2 + \dots \end{aligned}$$

waarvan ons hier alleen de drie eerste termen interesseren. Als nieuwe coördinaten gaan we nu kiezen

25.5)

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{\kappa} &\stackrel{\text{def}}{=} \delta_{\kappa}^{\mu} f^{\mu} z = \\ &= \delta_{\kappa}^{\mu} \left(\mathcal{S}_0^{\mu} + f^{\mu} z - \frac{1}{2} \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} (f^{\rho} f^{\sigma}) z^2 + \dots \right) \end{aligned}$$

$\mu, \lambda, \dots, n$

en door differentiatie volgt

25.6)

$$\left. \begin{aligned} A_{\lambda}^{\kappa} &= \delta_{\lambda}^{\kappa} \\ \partial_{\mu} A_{\lambda}^{\kappa} &= \delta_{\kappa}^{\mu} \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} (f^{\mu}) \end{aligned} \right\} \text{ voor } \mathcal{S}^{\kappa} = \mathcal{S}_0^{\kappa}$$

Nu is ingevolge (23.7)

25.7)

$$\Gamma_{ji}^{\mu} = A_{\kappa ji}^{\mu} \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} - A_{ji}^{\mu\lambda} \partial_{\mu} A_{\lambda}^{\kappa}$$

en dus in $\mathcal{S}^{\kappa}$

25.8)

$$\Gamma_{ji}^{\mu} = \delta_{\kappa}^{\mu} \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} - \delta_{ji}^{\mu\lambda} \delta_{\kappa}^{\mu} \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} = 0$$

wat te bewijzen was. Een dergelijk coördinatenstelsel heet een stelsel van normaalcoördinaten voor het punt P^{κ} . Zij hangen alleen af van de keuze van de ∞^n vectoren f^{κ} en van het stelsel (κ) . Laat men dus die vectoren onveranderd en transformeert men alleen (κ) dan is

$$25.9) \quad \xi^{\lambda'} = \delta_{\kappa}^{\lambda'} \xi^{\kappa} = \delta_{\kappa}^{\lambda'} A_{\kappa}^{\alpha'} (\xi^{\alpha}) \xi^{\kappa} = \delta_{\kappa}^{\lambda'} A_{\kappa}^{\alpha'} (\xi^{\alpha}) \xi^{\kappa}$$

d.w.z. de normaalcoördinaten in ξ^{α} zijn door de keuze van de vectoren vastgelegd op lineaire homogene transformaties na.

Normaalcoördinaten worden dikwijls met vrucht gebruikt om ingewikkelde berekeningen te vereenvoudigen. Voorbeelden later.

§ 26. De V_n

Wordt in een X_n een reeel tensorveld $g_{\lambda\kappa}$ van de rang n ingevoerd dan ontstaat een V_n . Elke locale ξ^{α} wordt een ξ^{α} . Op- en neerhalen van indices geschiedt als in § 11. Voor de lengte van het lijnelement $d\xi^{\alpha}$ schrijven we ds (in de relativiteitstheorie ook cds)

$$ds^2 = |g_{\lambda\kappa} d\xi^{\lambda} d\xi^{\kappa}|$$

Een kromme waarop $ds=0$ in ieder punt heet nul-kromme. Voor een gewone kromme bestaat er voor ieder segment een lengte s .

De belangrijkste eigenschap in V_n is dat $g_{\lambda\kappa}$ eenduidig een symmetrische overbrenging vastlegt, voldoende aan de voorwaarde

$$26.1) \quad \nabla_{\mu} g_{\lambda\kappa} = 0$$

Inderdaad kan men door permutatie uit

$$26.2) \quad \partial_{\mu} g_{\lambda\kappa} - \cancel{\Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} g_{\sigma\kappa}} - \cancel{\Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma} g_{\lambda\sigma}} = \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} g_{\sigma\kappa} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma} g_{\lambda\sigma} = 0$$

twee andere vergelijkingen afleiden

$$26.3) \quad \begin{aligned} \partial_{\lambda} g_{\kappa\mu} - g_{\mu\mu} \Gamma_{\lambda\kappa}^{\mu} - g_{\kappa\sigma} \Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} &= \cancel{\Gamma_{\lambda\kappa}^{\mu} g_{\mu\mu}} = 0 \\ -\partial_{\kappa} g_{\mu\lambda} + g_{\mu\lambda} \Gamma_{\kappa\mu}^{\mu} + g_{\mu\sigma} \Gamma_{\kappa\lambda}^{\sigma} &= 0 \end{aligned}$$

en optelling geeft ingevolge de eis $\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} = \Gamma_{\lambda\mu}^{\kappa}$:

$$26.4) \quad \partial_{\mu} g_{\lambda\kappa} + \partial_{\lambda} g_{\mu\kappa} - \partial_{\kappa} g_{\mu\lambda} = 2 g_{\mu\lambda} \Gamma_{\mu\kappa}^{\mu}$$

of 26.5)

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} = \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\kappa\sigma} (\partial_{\mu} g_{\lambda\sigma} + \partial_{\lambda} g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} g_{\mu\lambda})$$

$\left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\}$ is het Christoffelsymbool.

Uit (26.5) volgt

$$26.6) \quad \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \partial_{\mu} g_{\rho\lambda} = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \log g$$

Bijgevolg is

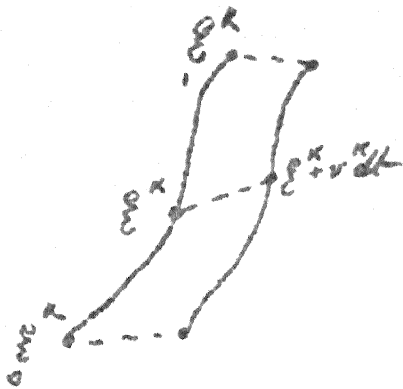
$$26.7) \quad \partial_{\mu} g = \partial_{\mu} g - 2 g \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} \quad (\text{verg. (23.17)})$$

Deze formule kan worden gebruikt om de covariante afgeleide van een contravariante p-vector in een vorm te schrijven die alleen ∂_{μ} en geen ∇_{μ} of $\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}$ bevat:

$$26.8) \quad \nabla_{\mu} v^{\mu\kappa\lambda\cdots\kappa} = g^{-\frac{1}{2}} \partial_{\mu} (g^{\frac{1}{2}} v^{\mu\kappa\lambda\cdots\kappa}) = g^{-\frac{1}{2}} \partial_{\mu} (g^{\frac{1}{2}} v^{\mu\kappa\lambda\cdots\kappa})$$

We bewijzen dat in een V_n de geodetische lijnen thans de kortste (langste) lijnen zijn.

Neem een kromme tussen ξ^{α} en ξ^{α} en noem het algemene punt ξ^{α} . Geef dan aan ξ^{α} een verplaatsing v^{α} , waar v^{α} een vector is gedefinieerd langs de kromme. We hebben dan s te berekenen langs beide



krommen. Om dat handig te doen breiden we het veld v^κ continu uit op de een of andere manier in de gehele omgeving van de krommen. In zij de veldwaarde $g_{\lambda\kappa}$, dan is de veldwaarde in $\xi^{\kappa+v}dt$ gelijk aan $g_{\lambda\kappa} + v^\sigma \partial_\sigma g_{\lambda\kappa} dt$ en met die veldwaarde moeten we op de tweede kromme rekenen. Bovendien is het lijnelement $d\xi^\kappa$ van stand veranderd. Dit werkt gecompliceerd en we doen dat nu anders. We slepen tweede kromme en veld mee over $-v^\sigma dt$, en kunnen dan eenvoudig rekenen met de oude kromme maar met een nieuwe veldwaarde in ξ^κ , waarvan we in § 20

hebben bewezen dat die gelijk is aan

$$26.9) \quad g_{\lambda\kappa} + (v^\sigma \partial_\sigma g_{\lambda\kappa} + g_{\sigma\kappa} \partial_\lambda v^\sigma + g_{\lambda\sigma} \partial_\kappa v^\sigma) dt$$

of ook (zie (23.24))

$$26.10) \quad g_{\lambda\kappa} + (g_{\sigma\kappa} \partial_\lambda v^\sigma + g_{\lambda\sigma} \partial_\kappa v^\sigma) dt = g_{\lambda\kappa} + 2 (\eta_{\lambda\kappa} v_\sigma) dt$$

omdat $\nabla_\mu g_{\lambda\kappa} = 0$

Bijgevolg is als ds een willekeurige parameter op de kromme is:

$$26.11) \quad \begin{aligned} d^2 ds &= d \left(g_{\lambda\kappa} \frac{d\xi^\lambda}{ds} \frac{d\xi^\kappa}{ds} \right) \frac{1}{2} ds \\ &= \frac{1}{2} (g_{\lambda\kappa} \frac{d^2 \xi^\lambda}{ds^2} \frac{d\xi^\kappa}{ds} + \frac{d\xi^\lambda}{ds} \frac{d^2 \xi^\kappa}{ds^2} g_{\lambda\kappa}) \frac{1}{2} ds \\ &= (\eta_{\lambda\kappa} v_\sigma) \frac{d^2 \xi^\lambda}{ds^2} \frac{d^2 \xi^\kappa}{ds^2} ds dt = \frac{d^2 \xi^\lambda}{ds^2} \frac{d^2 \xi^\kappa}{ds^2} \delta v_\sigma ds dt \end{aligned}$$

en dus

$$26.12) \quad \begin{aligned} d \int_{\xi^\kappa}^{\xi^{\kappa+v}} ds &= dt \int_{\xi^\kappa}^{\xi^{\kappa+v}} \frac{d^2 \xi^\lambda}{ds^2} \delta v_\sigma ds \\ &= dt \left\{ \left(v_\sigma \frac{d^2 \xi^\lambda}{ds^2} \right)_{\xi^{\kappa+v}} - \left(v_\sigma \frac{d^2 \xi^\lambda}{ds^2} \right)_{\xi^\kappa} \right\} - dt \int_{\xi^\kappa}^{\xi^{\kappa+v}} \frac{d^2 \xi^\lambda}{ds^2} \delta v_\sigma ds \end{aligned}$$

Indien nu v^κ in ξ^κ en in $\xi^{\kappa+v}$ dan volgt dat de variatie van $\int ds$ dan en alleen dan voor iedere keuze van v^κ nul is indien

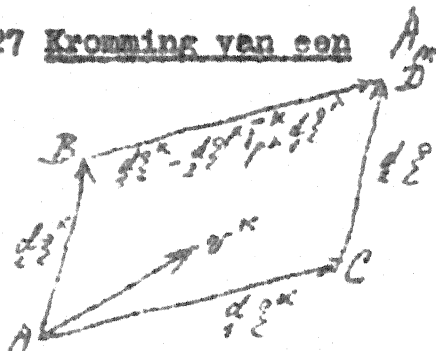
$$26.13) \quad \delta \frac{d^2 \xi^\lambda}{ds^2} = 0$$

d.w.z. indien de kromme een geodetische lijn is. De lengte tussen twee punten is dan extreem en voor definitieve fundamentealtensor (bij reële krommen) altijd minimum. Bij indefiniëte fundamentealtensor kan de lengte ook maximum worden.

Een geodetische lijn die met een van zijn elementen op de nulkegel ligt, ligt geheel op de nulkegel. Want is $\dot{s}$ een tangentiële vector in dat punt dan blijft deze vector bij pseudoparallele verplaatsing langs de kromme zijn lengte, dat is nul, behouden. Omgekeerd is natuurlijk niet iedere kromme op de nulkegel geodetisch.

§ 27 Kromming van een

ruimte



Neem een infinitesimaal parallelogram in punt A en in plaats van uit A een vector v^k pseudoparallel van A over B naar D en ook van A over C naar D. Het verschil tussen de beide verplaatste waarden is een vector en wel

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \frac{d^2 x^\nu}{ds^2} \left\{ 2 \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\mu + 2 \Gamma_{\mu\lambda}^\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \right\} v^\lambda$$

27.1)

Bijgevolg is

27.2)

$$R_{\nu\mu\lambda}^{\dots k} = 2 \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^k + 2 \Gamma_{\nu\mu}^k \Gamma_{\lambda}^{\dots}$$

een affinor. Dit is de kromteaffinor van de overbrenging $\Gamma_{\mu\lambda}^k$.
Deze affinor komt ook op andere wijze voor den dag. Men bewijst gemakkelijk dat

27.3)

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial_\nu v^k &= \frac{1}{2} R_{\nu\mu\lambda}^{\dots k} v^\lambda \\ \partial_\mu \partial_\nu w_\lambda &= -\frac{1}{2} R_{\nu\mu\lambda}^{\dots k} w_k \\ \partial_\mu \partial_\nu \varphi &= -\frac{1}{2} R_{\nu\mu\lambda}^{\dots k} \varphi \end{aligned} \quad (\varphi \text{ gewicht } +1)$$

en algemener bijv.

27.4)

$$\partial_\mu \partial_\nu f^{\dots k} = \frac{1}{2} R_{\nu\mu\lambda}^{\dots k} f^{\dots k} - \frac{1}{2} R_{\nu\mu\lambda}^{\dots k} f^{\dots k} - \frac{1}{2} R_{\nu\mu\lambda}^{\dots k} f^{\dots k}$$

Voor $\tilde{v}^k$, $\tilde{w}_\lambda$, $\tilde{\varphi}$ en $\tilde{f}^{\dots k}$ gelden precies dezelfde formules. (gewicht k)

Identiteiten voor de kromteaffinor

Eerste identiteit (volgt direct uit de definitie)

27.5)

$$R_{[\nu\mu]\lambda}^{\dots k} = 0$$

Tweede identiteit (volgt direct uit de definitie)

27.6

$$R_{[\nu\mu\lambda]}^{\dots k} = 0$$

Derde identiteit (alleen voor k alwaar men $R_{\nu\mu\lambda}^{\dots k}$ schrijft i.p.v. $R_{\nu\mu\lambda}^{\dots k}$)

27.7)

$$R_{\nu\mu}(k) = 0$$

Bewijs:

27.8)

$$0 = \partial_\mu \partial_\nu g_{\lambda k} = -\frac{1}{2} R_{\nu\mu\lambda}^{\dots k} g_{\lambda k} - \frac{1}{2} R_{\nu\mu\lambda}^{\dots k} g_{\lambda k} = -R_{\nu\mu}(k)$$

Vierde identiteit (alleen voor V_n)

27.9)

$$R_{\mu\lambda\kappa} = R_{\kappa\lambda\mu}$$

(volgt direct uit de 2de en de 3de identiteit)

Mit de derde identiteit volgt $R_{\mu\nu\sigma}^{\sigma} = 0$. In een V_n is dus (zie 27.3 c)) $R_{\mu\nu}^{\sigma\sigma} = 0$, d.w.z. de overbrenging in een V_n is integraal voor dichtheden en dat is geen wonder omdat lengten invariant blijven en dus ook inhouden.

$R_{\mu\nu\lambda\kappa}$ is alternerend in μ, ν en in λ, κ en bovendien nog eens symmetrisch in de groepen μ, ν , λ, κ . Dit is dus een soort grootheden dat t.o. van bivectoren dezelfde rol vervult als een tensor van valentie 2 t.o. van vectoren. Men noemt ze wel bivector-tensoren. Een algemene bivector-tensor heeft

$$\frac{1}{2} \{ \frac{1}{2} n(n-1) \cdot \frac{1}{2} n(n-1) \} = \frac{1}{8} n^2(n-1)(n-2)$$

onafhankelijke kentallen. Maar $R_{\mu\nu\lambda\kappa}$ voldoet ook aan

27.10)

$$R_{[\mu\nu\lambda\kappa]} = 0$$

welke vergelijking volgt uit de 2de, 3de en 4de identiteit en te samen met de 3de en de 4de gelijkwaardig is aan deze drie. Dit geeft $\left(\frac{n}{2}\right)$ extra vergelijkingen en daaruit volgt dat er precies $\frac{1}{8} n^2(n-1)(n-2)$ onafhankelijke kentallen overblijven (1 voor $n=2$; 6 voor $n=3$; 20 voor $n=4$)

Ricci leidde voor de afgeleiden van $R_{\mu\nu}^{\lambda\kappa}$ een identiteit af, die genoemd is naar Bianchi:

27.11)

$$\partial_\omega R_{\mu\nu\lambda}^{\lambda\kappa} = 0$$

Bewijs: We nemen in enig vast punt een stelsel normaalcoördinaten bij dat punt behorend (zie § 25). Dan is aldaar $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$. Maar de afgeleiden van $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ behoeven er niet nul te zijn! Nu is in dat punt

27.12)

$$\begin{aligned} \partial_\omega R_{\mu\nu\lambda}^{\lambda\kappa} &= \partial_\omega R_{\mu\nu\lambda}^{\lambda\kappa} = 2 \partial_\omega \{ \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa + \Gamma_{\nu\mu}^\kappa \Gamma_{\lambda\kappa}^\rho \} \\ &= 2 (\partial_\omega \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa) \Gamma_{\nu\kappa}^\rho + 2 \Gamma_{\nu\mu}^\kappa \partial_\omega \Gamma_{\lambda\kappa}^\rho = 0 \end{aligned}$$

Vouwing naar V_n levert de affinor van Ricci:

27.13)

$$R_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} R_{\mu\nu}^{\lambda\lambda}$$

In een V_n is deze affinor kennelijk een tensor:

27.14)

$$R_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} R_{\mu\nu}^{\lambda\lambda} = R_{\lambda\mu}$$

Uit $R_{\mu\nu}$ kan men de scalar

27.15)

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

vormen. $\frac{1}{n} R$ heet de scalare kromming van de V_n . Inderdaad rekent men gemakkelijk uit dat voor een oppervlak in E_3 de gewone kromming juist gelijk $\frac{1}{2} R$ is.

Uit de identiteit van Bianchi volgt bij vouwing

27.16)

$$\partial_\omega R_{\mu\nu}^{\lambda\kappa} + \partial_\nu R_{\mu\kappa}^{\lambda\omega} + \partial_\mu R_{\nu\omega}^{\lambda\kappa} = 0$$

of

27.17)

$$R_{\nu\mu\lambda}^{\dots\omega} + 2 \nabla_{\mu}^{\nu} R_{\nu\lambda}^{\dots\omega} = 0$$

In V kan men deze identiteit nog eens met $g^{\mu\lambda}$ overschuiven en dat geeft

27.18)

$$2 \nabla_{\mu}^{\nu} R_{\nu}^{\mu} - \nabla_{\mu}^{\mu} R = 0$$

of indien men de tensor

27.19)

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} ; \quad (G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu} !)$$

invoert:

27.20)

$$\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = 0$$

Deze identiteit is van centrale betekenis in de algemene relativiteitstheorie. Men noemt het linker lid wel de "divergentie van $G^{\mu\nu}$ ". In een V bestaat dus steeds een tensor wiens divergentie nul is, en deze hangt af van $g_{\mu\nu}$ en de afgeleiden van $g_{\mu\nu}$ tot de tweede orde.

We zullen nu aantonen dat de dichtheid

27.21)

$$- \frac{1}{2} \sqrt{-g} R$$

juist de Lagrangeafgeleide van $\sqrt{-g} R$ met betrekking tot $g_{\mu\nu}$ is. Palatini gaf een zeer kort bewijs gebruikmakende van de normaalcoördinaten behorende bij een bepaald punt $\mathcal{P}^k$. Dan is $\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}$ aldaar nul en dat wil ingevolge (26.2) zeggen dat ook de afgeleiden $\nabla_{\mu}^{\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}$ in $\mathcal{P}^k$ nul moeten zijn. Is nu $\delta g_{\mu\nu}$ de variatie van $g_{\mu\nu}$ dan zullen de $\delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}$ in $\mathcal{P}^k$ in het algemeen niet nul zijn, immers de normaalcoördinaten zijn geen normaalcoördinaten meer voor de $\delta g_{\mu\nu}$ behorende overbrenging. Maar wel weten we dat de $\delta g_{\mu\nu}$ verschillen zijn van de parameters van twee verschillende overbrengingen en daaruit volgt op grond van de transformatiewijze (23.7) van zulke parameters dat de $\delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}$ in elk geval kentallen van een affinor zijn.

Nu is

27.22)

$$R = 2 g^{\mu\lambda} (\partial_{\mu} \Gamma_{\lambda}^{\nu} + \Gamma_{\mu}^{\nu} \Gamma_{\lambda}^{\mu})$$

en dus is in het punt $\mathcal{P}^k$

$$\begin{aligned} d(\sqrt{-g} R) &= \sqrt{-g} R + 2 \sqrt{-g} \frac{1}{2} (d g^{\mu\lambda}) \partial_{\mu} \Gamma_{\lambda}^{\nu} + 2 \sqrt{-g} g^{\mu\lambda} \partial_{\mu} d \Gamma_{\lambda}^{\nu} + \\ &= \sqrt{-g} R + \sqrt{-g} \frac{1}{2} (d g^{\mu\lambda}) \partial_{\mu} \Gamma_{\lambda}^{\nu} + \sqrt{-g} R \frac{1}{2} d g^{\mu\lambda} + \\ &= \sqrt{-g} R + \sqrt{-g} \frac{1}{2} (d g^{\mu\lambda}) \partial_{\mu} \Gamma_{\lambda}^{\nu} + \sqrt{-g} R \frac{1}{2} d g^{\mu\lambda} + \\ &= \sqrt{-g} R + \sqrt{-g} \frac{1}{2} (d g^{\mu\lambda}) \partial_{\mu} \Gamma_{\lambda}^{\nu} + \sqrt{-g} R \frac{1}{2} d g^{\mu\lambda} + \\ &= \sqrt{-g} R + \sqrt{-g} \frac{1}{2} (d g^{\mu\lambda}) \partial_{\mu} \Gamma_{\lambda}^{\nu} + \sqrt{-g} R \frac{1}{2} d g^{\mu\lambda} + \\ &= \sqrt{-g} R + \sqrt{-g} \frac{1}{2} (d g^{\mu\lambda}) \partial_{\mu} \Gamma_{\lambda}^{\nu} + \sqrt{-g} R \frac{1}{2} d g^{\mu\lambda} + \end{aligned}$$

27.23)

waar het teken $\pm$ ten slotte weer door $\dots$ vervangen mocht worden omdat de vergelijking de invariante vorm verkregen heeft.
Nu is volgens (19.11) en (27.23)

$$27.24) \quad \int_{T_n} g^{ik} R_{ik} df = \int_{T_n} d(g^{ik} R) df - \int_{T_n} g^{ik} \gamma_{ik} + dg^{ik} df + \int_{T_n} g^{ik} (g^{jk} d\gamma_{jk} - g^{jk} d\gamma_{jk}) df$$

is dus T_n een gebied van V op welke begrenzing de variaties van g_{ik} , γ_{ik} en $\partial_j g_{ik}$ nul zijn, dan verdwijnt de tweede term rechts en er blijft

$$27.25) \quad \int_{T_n} g^{ik} R_{ik} df = \int_{T_n} g^{ik} \gamma_{ik} dg^{ik} df - \int_{T_n} g^{ik} \gamma_{ik} df = - \int_{T_n} g^{ik} dg_{ik} df$$

De identiteit (21.12) gaat voor $[R]^{ik} = -g^{ik}$ over in

$$27.26) \quad -g^{ik} (\partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) + g_{jk} \partial_i g^{ik} + g_{ik} \partial_j g^{jk} = 0$$

of

$$27.27) \quad g^{ik} \gamma_{ik} + \partial_i g^{ik} = \partial_i g^{ik} = 0$$

in overeenstemming met (27.20)

§28. De covariante differentiatie in anholonome coördinaten.

Is (x^i) een anholonoom coördinatenstelsel in $\mathbb{R}^n$ dan blijft (23.1) gelden, dus

$$28.1) \quad \Gamma_{ij}^k = A_{kji}^{\alpha\beta\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} - A_{ji}^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} A_{\beta}^k$$

waar $\partial_{\alpha} A_{\beta}^k$ is niet langer nul. Ingevolge (28.8) is dus

$$28.2) \quad \Gamma_{ij}^k = \Omega_{ji}^k - \Omega_{ji}^k$$

en in een A_{α}

$$28.3) \quad \Gamma_{ij}^k = -\Omega_{ji}^k$$

Bijgevolg is nu

$$28.4) \quad a) \quad \partial_j w_i = \partial_j w_i + \Omega_{ji}^k w_k$$

$$b) \quad \partial_j w^i = \partial_j w^i + \Omega_{ji}^k w^k$$

hieruit laten zich (22.7) en (22.10) onmiddellijk afleiden.

Op dezelfde wijze als (25.5) kan nu in een V met behulp van (28.1) worden afgeleid

$$28.5) \quad \Gamma_{ij}^k = \Omega_{ji}^k - \Omega_{ji}^k + \Omega_{ji}^k + \Omega_{ji}^k$$

Bestaat dus het anholonome stelsel uit onderling loodrechte eenheidsvectoren, dan is $\{\hat{e}_i\}_{i=0}^n$ en

$$28.6) \quad \Gamma_{ij}^k = -\Omega_{ji}^k + \Omega_{ji}^k + \Omega_{ji}^k$$

Uit (28.5) volgt voor Γ_{ij}^k

$$28.7) \quad \Gamma_{ij}^k = \{\hat{e}_i\} - \Omega_{ji}^k + \Omega_{ji}^k + \Omega_{ji}^k = \{\hat{e}_i\} = \frac{1}{2} \partial_i \log g$$

Daaruit zien we dat (26.7) inderdaad ook voor niet holonome coördinaten geldt:

$$28.8) \quad \nabla_j g_{ik} = \partial_j g_{ik} - 2g_{ik} \Gamma_{ij}^i = 0$$

In krijgen we voor de kromteaffinor in plaats van (27.2)

$$28.9) \quad R_{jki}^h = 2\Gamma_{jk}^h \Gamma_{li}^i + 2\Gamma_{li}^h \Gamma_{jk}^i + 2\Gamma_{li}^i \Gamma_{jk}^h$$

Natuurlijk zijn alle vergelijkingen tussen grootheden die alleen ∇ bevatten en niet Γ of Δ invariant ook voor de overgang tot anholonome coördinaten. Maar vergelijkingen die Γ of Δ bevatten krijgen er in den regel correctietermen bij met Δ . Het is soms gemakkelijker het teken Δ te gebruiken indien men uit wil drukken dat een vergelijking alleen voor holonome coördinaten geldt, bijv.:

$$28.10) \quad \Delta^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^i = \Delta^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^i$$

VI Fysische objecten en hun dimensies.

(Dorgelo en Schouten, On Units and Dimensions,
Proc. Kon. Akad. 49 (1946) 123-131
262-291
393-403)

29. Absolute en relatieve dimensies.

Fysische objecten worden beschreven t.o. van coördinaten en van zekere grondeenheden, waarvoor we hier bij wijze van voorbeeld zullen nemen: massa M , lengte L , tijd T en elektrische lading Q . Voor deze grondeenheden worden alleen transformaties van de vorm

$$29.1) \quad M' = m M; L' = l L; T' = t T; Q' = q Q$$

toegelaten waarin m, l, t en q willekeurige constanten zijn. De transformatie (29.1) heet maatverandering.

Definitie van een fysisch object in een V_n ($n=3$ gewone ruimte, $n=4$ ruimte-tijdversl).

Een fysisch object in een bepaald punt P van een V is een correspondentie tussen de toegelaten coördinatenstelsels en de toegelaten stelsels van grondeenheden enerzijds en de geordende stellingen van n getallen anderzijds, voldoende aan de voorwaarden:

a. aan ieder toegelaten coördinatenstelsel en ieder toegelaten stel grondeenheden is slechts een geordend stel van n getallen toegevoegd;

b. indien $\vec{A} = A_1, A_2, \dots, A_n$ en $\vec{B} = B_1, B_2, \dots, B_n$ waaraan behoren bij $\vec{A}$ en $\vec{B}$ dan hangen de A_i alleen af van de B_j de functies $A_i = A_i(B_j)$ in de omgeving van P en wel op zodanige wijze dat m, l, t en q alleen voorkomen in de vorm van een factor $m^a l^b t^c q^d$ die voor elk van de A_i dezelfde is.

Het gerai dat de factoren verschillen, bijv. bij een snelheid in poolcoördinaten, kan altijd tot het hier behandelde worden teruggebracht.

De $\vec{A}$ heten de kantallen t.o. van $\vec{B}$ K, L, T, Q . Zijn de $\vec{A}$ lineair homogeen in de $\vec{B}$, homogeen algebraïsch in de $\vec{B}$ en onafhankelijk van $\vec{B}$ voor de afgeleiden dan heet het object een fysische grootheid.

Een stel getallen kan een fysisch object vormen t.o. v. zekere coördinatentransformaties en niet ten opzichte van andere transformaties. Bijv. elektrische veldsterkte bij orthogonale transformaties in R_3 maar niet in R_4 .

Worden M, L, T en Q vastgehouden dan blijven alleen de coördinatentransformaties. Dus bestaat er bij ieder fysisch object een geometrisch object dat bij transformatie van $\vec{B}$, L , T , Q een factor $m^a l^b t^c q^d$ krijgt. Dit object heet het geometrisch beeld van het fysisch object en $[m^a l^b t^c q^d]$ zijn dimensie, of ook de absolute dimensie van het fysisch object.

De absolute dimensie is dus gedefinieerd ten opzichte van algemene coördinatentransformaties, pseudogroep $\mathcal{G}$ in X of groep G in een $\mathcal{G}$ of G . De absolute dimensie is niet identiek met de dimensie in de gewone zin.

Neem bijv. een snelheid met de kentallen v^{α} t.o.v. van een algemeen coördinatenstelsel. Het meetkundig beeld is de pijl van de weg afgelegd per tijdseenheid. Verander de tijdseenheid met een factor λ dan krijgt ook deze vector een factor λ . Zijn absolute dimensie is dus L/T . Neemt men echter de orthogonale kentallen t.o.v. een holonoem of anholonoem orthogonaal coördinatenstelsel, gebaseerd op de eenheid van lengte, dan krijgen de v^{α} een factor $\lambda^{1/2}$ bij maatverandering.

Dit leidt tot de definitie:

Indien de kentallen van een geometrisch object t.a.v. een orthogonaal coördinatenstelsel, gebaseerd op de eenheid van lengte, bij maatverandering een factor $\lambda^{n/2}$ krijgen, dan heet n de relatieve dimensie, of kort dimensie van het object.

Dit is de in de fysica gebruikelijke dimensie. Het verschil zit natuurlijk daarin dat de orthogonale coördinatenstelsels in tegenstelling tot de algemene, zelf veranderen bij maatverandering. Dit heeft als gevolg dat de betrekkingen tussen absolute en relatieve dimensie onafhankelijk zijn van de fysischen aard van het object en alleen afhangen van de transformatiewijze van zijn geometrisch beeld.

De overgang van algemene op orthogonale coördinaten geschiedt met behulp van A^{α}_{β} en A^{β}_{α} . Nu krijgt de eenheidsvector e^{α} bij maatverandering een factor $\lambda^{1/2}$ en bijgevolg krijgt de relatieve dimensie een extra factor $\lambda^{1/2}$ voor iedere A^{α}_{β} en een factor $\lambda^{1/2}$ voor iedere A^{β}_{α} die in de transformatieformules $(\alpha) \rightarrow (\beta)$ optreedt. Aangesien in $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1(\mathcal{H})$ juist n factoren A^{α}_{β} zitten krijgt een dichtheid van het gewicht ρ een extra factor $\lambda^{-n/2}$ in zijn relatieve dimensie. Hier is een tabel voor $n=3$:

abs. dim.	rel. dim.	abs. dim.	rel. dim.
$\left. \begin{array}{l} \rho \\ \rho^{\alpha} \\ \rho^{\alpha\beta} \\ \rho^{\alpha\beta\gamma} \\ \rho^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ \rho^{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon} \\ \rho^{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} \\ \rho^{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\eta} \end{array} \right\} [A]$	$\left. \begin{array}{l} [D] \\ [D^{\alpha}] \\ [D^{\alpha\beta}] \\ [D^{\alpha\beta\gamma}] \\ [D^{\alpha\beta\gamma\delta}] \\ [D^{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon}] \\ [D^{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta}] \\ [D^{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\eta}] \end{array} \right\} [D]$	$\left. \begin{array}{l} \rho \\ \rho^{\alpha} \\ \rho^{\alpha\beta} \\ \rho^{\alpha\beta\gamma} \\ \rho^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ \rho^{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon} \\ \rho^{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} \\ \rho^{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\eta} \end{array} \right\} [D]$	$\left. \begin{array}{l} [D] \\ [D^{\alpha}] \\ [D^{\alpha\beta}] \\ [D^{\alpha\beta\gamma}] \\ [D^{\alpha\beta\gamma\delta}] \\ [D^{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon}] \\ [D^{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta}] \\ [D^{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\eta}] \end{array} \right\} [D]$

De absolute dimensie geeft aan welke grondeenheden bekend moeten zijn voor de constructie van het geometrisch beeld, de relatieve die welke nodig zijn voor de meting der orthogonale kentallen.

absoluut

relatief

Bijv. geometrische beeldendheid, ter constructie alleen een klok nodig.

Hier volgen enige voorbeelden van absolute en relatieve dimensies in V_2 :

	absoluut	relatief
g^1	$[1]$	$[1]$
g^2	$[1]$	$[1]$
g^3	$[1]$	$[1]$
g^4	$[1]$	$[1]$
g^5	$[1]$	$[1]$
g^6	$[1]$	$[1]$
g^7	$[1]$	$[1]$
g^8	$[1]$	$[1]$
g^9	$[1]$	$[1]$
g^{10}	$[1]$	$[1]$
g^{11}	$[1]$	$[1]$
g^{12}	$[1]$	$[1]$
g^{13}	$[1]$	$[1]$
g^{14}	$[1]$	$[1]$
g^{15}	$[1]$	$[1]$
g^{16}	$[1]$	$[1]$
g^{17}	$[1]$	$[1]$
g^{18}	$[1]$	$[1]$
g^{19}	$[1]$	$[1]$
g^{20}	$[1]$	$[1]$
g^{21}	$[1]$	$[1]$
g^{22}	$[1]$	$[1]$
g^{23}	$[1]$	$[1]$
g^{24}	$[1]$	$[1]$
g^{25}	$[1]$	$[1]$
g^{26}	$[1]$	$[1]$
g^{27}	$[1]$	$[1]$
g^{28}	$[1]$	$[1]$
g^{29}	$[1]$	$[1]$
g^{30}	$[1]$	$[1]$
g^{31}	$[1]$	$[1]$
g^{32}	$[1]$	$[1]$
g^{33}	$[1]$	$[1]$
g^{34}	$[1]$	$[1]$
g^{35}	$[1]$	$[1]$
g^{36}	$[1]$	$[1]$
g^{37}	$[1]$	$[1]$
g^{38}	$[1]$	$[1]$
g^{39}	$[1]$	$[1]$
g^{40}	$[1]$	$[1]$
g^{41}	$[1]$	$[1]$
g^{42}	$[1]$	$[1]$
g^{43}	$[1]$	$[1]$
g^{44}	$[1]$	$[1]$
g^{45}	$[1]$	$[1]$
g^{46}	$[1]$	$[1]$
g^{47}	$[1]$	$[1]$
g^{48}	$[1]$	$[1]$
g^{49}	$[1]$	$[1]$
g^{50}	$[1]$	$[1]$
g^{51}	$[1]$	$[1]$
g^{52}	$[1]$	$[1]$
g^{53}	$[1]$	$[1]$
g^{54}	$[1]$	$[1]$
g^{55}	$[1]$	$[1]$
g^{56}	$[1]$	$[1]$
g^{57}	$[1]$	$[1]$
g^{58}	$[1]$	$[1]$
g^{59}	$[1]$	$[1]$
g^{60}	$[1]$	$[1]$
g^{61}	$[1]$	$[1]$
g^{62}	$[1]$	$[1]$
g^{63}	$[1]$	$[1]$
g^{64}	$[1]$	$[1]$
g^{65}	$[1]$	$[1]$
g^{66}	$[1]$	$[1]$
g^{67}	$[1]$	$[1]$
g^{68}	$[1]$	$[1]$
g^{69}	$[1]$	$[1]$
g^{70}	$[1]$	$[1]$
g^{71}	$[1]$	$[1]$
g^{72}	$[1]$	$[1]$
g^{73}	$[1]$	$[1]$
g^{74}	$[1]$	$[1]$
g^{75}	$[1]$	$[1]$
g^{76}	$[1]$	$[1]$
g^{77}	$[1]$	$[1]$
g^{78}	$[1]$	$[1]$
g^{79}	$[1]$	$[1]$
g^{80}	$[1]$	$[1]$
g^{81}	$[1]$	$[1]$
g^{82}	$[1]$	$[1]$
g^{83}	$[1]$	$[1]$
g^{84}	$[1]$	$[1]$
g^{85}	$[1]$	$[1]$
g^{86}	$[1]$	$[1]$
g^{87}	$[1]$	$[1]$
g^{88}	$[1]$	$[1]$
g^{89}	$[1]$	$[1]$
g^{90}	$[1]$	$[1]$
g^{91}	$[1]$	$[1]$
g^{92}	$[1]$	$[1]$
g^{93}	$[1]$	$[1]$
g^{94}	$[1]$	$[1]$
g^{95}	$[1]$	$[1]$
g^{96}	$[1]$	$[1]$
g^{97}	$[1]$	$[1]$
g^{98}	$[1]$	$[1]$
g^{99}	$[1]$	$[1]$
g^{100}	$[1]$	$[1]$

§ 30. Constructie van het geometrisch beeld.

Voorbeelden:

1) ρ = snelheid stromende vloeistof, μ = dichtheid, dus $\mu \rho$ is massa per cm^2 = dichtheid gewicht, en ρ^2/μ massa per cm^2 = scalar. ρ heeft absolute dimensie $[cm]$ en relatieve $[cm/t]$. μ^2/ρ is de stroomvector-dichtheid. Dimensies $[cm^2]$ en $[cm^2/t]$. Het geometrisch beeld is een cylinder met inwendige oriëntering. Is σ de massa die van buiten af op een of andere ~~manier~~ manier wordt ingepompt per cm^2 en per eenheid van tijd dan is de continuïteitsvergelijking

$$30.1) \quad \partial_\mu \rho^\mu = \partial_\mu \rho [t] = \rho [t] \quad \text{Dimensie (abs.)} = [cm^2]$$

In orthogonale coördinaten

$$30.2) \quad \partial_i \rho^i + \partial_t \rho [t] = \rho [t] \quad \text{Dimensie (rel.)} = [cm^2 t^{-1}]$$

De cylinder van σ in enig punt is de cylinder die juist de eenheid van massa per eenheid van tijd doorleest. Nodig voor de constructie μ en ρ . Het geometrisch beeld van ρ is het volume dat juist de eenheid van massa bevat. Nodig alleen μ . Het geometrisch beeld van μ is het volume waarin in de eenheid van tijd juist de eenheid van massa gepompt wordt. Nodig μ en ρ .

2) Beschouw de electromagnetische vergelijkingen

$$30.3) \quad \begin{aligned} a) \quad \text{rot } \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ b) \quad \text{div } \vec{B} &= 0 \\ c) \quad \vec{D} - \epsilon \vec{E} &= \rho \vec{E} \\ d) \quad \text{div } \vec{D} &= \rho \\ e) \quad \vec{B} &= \mu \vec{H} \\ f) \quad \vec{E} &= \mu \vec{H} \end{aligned}$$

$\vec{E}$ = elektrische en $\vec{H}$ = magnetische veldsterkte, $\vec{D}$ = dielectrische verplaatsing, $\vec{B}$ = magnetische inductie, ρ = ladingdichtheid en ϵ snelheid lading. In orthogonale eenheden luiden deze

$$30.4) \quad \begin{aligned} a) \quad \partial_\mu \vec{E}^\mu - \partial_\nu \vec{B}^\nu &= c \partial_t \vec{B}^\nu = 0 \\ b) \quad \partial_\mu \vec{B}^\mu &= 0 \\ c) \quad \partial_\mu \vec{D}^\mu - \partial_\nu \vec{H}^\nu &= \rho \vec{E}^\nu \quad ; \text{vgl. 17.3} \\ d) \quad \partial_\mu \vec{D}^\mu - \partial_\nu \vec{H}^\nu &= \rho \\ e) \quad \vec{B}^\nu &= \mu \vec{H}^\nu \\ f) \quad \vec{E}^\nu &= \mu \vec{H}^\nu \end{aligned}$$

Om deze vergelijkingen in een vorm te brengen invariant voor affiene transformaties is voor (30.4a) nodig dat $\vec{E}$ wordt beschouwd als

covariante vector of $\mathcal{W}$ -vector en $\mathcal{B}$ als covariante bivector of $\mathcal{W}$ -bivector. Daar echter de elektrische potentiaal geen schroefzin heeft is alleen de eerste veronderstelling mogelijk. Evenzo is, gezien dat de elektrische lading geen schroefzin heeft (zelfs een draaiend electron heeft geen schroefzin) alleen mogelijk $\mathcal{D}$ te beschouwen als contravariante veeoordichtheid en $\mathcal{E}$ als contravariante bivectoroordichtheid van het gewicht $+1$. Dan gaan de vergelijkingen in de volgende vorm die invariant is bij affiene transformaties en dus maar direct t.o. van een algemeen coördinatenstelsel wordt geschreven (signatuur...)

a) $- \frac{1}{c} \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} + c \partial_\nu \mathcal{B}_{\mu\nu} = 0$
 b) $c \partial_\mu \mathcal{D}^{\mu\nu} + \partial_\nu \mathcal{E}^{\mu\nu} = -\rho u^\nu$
 c) $\mathcal{D}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta}$
 d) $\mathcal{E}^{\mu\nu} = \mu g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \mathcal{B}_{\alpha\beta}$
 30.5) e) $\mathcal{D}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta}$
 f) $\mathcal{B}_{\mu\nu} = \mu g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \mathcal{E}^{\alpha\beta}$

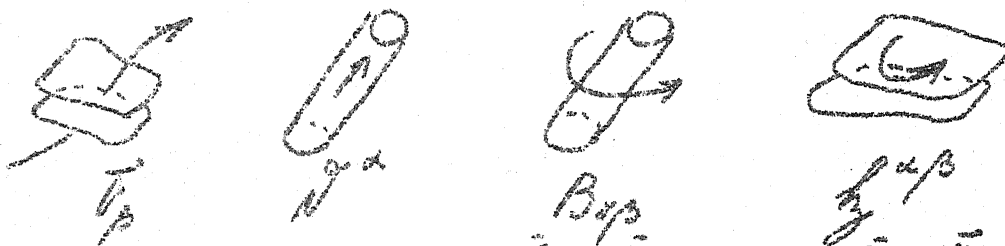
$\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$

In een anisotropoep medium komt in plaats van (30.5 e,f)

e') $\mathcal{D}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta}$
 30.6) f') $\mathcal{B}_{\mu\nu} = \mu g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \mathcal{E}^{\alpha\beta}$

$\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$

waar $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ en $\mu g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}$ affinordichtheden van het gewicht $+1$ en -1 zijn. De meestkundige beelden van $\mathcal{F}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{B}$ en $\mathcal{E}$ zijn dus



waaruit we zien dat de relatie tussen $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$ en tussen $\mathcal{B}$ en $\mathcal{E}$ in een isotropoep medium noodzakelijk de fundamentealtensor moet bevatten omdat het begrip "loodrecht" er aan te pas komt.

De relatieve dimensies van de elektromagnetische grootheden zijn bekend en wij vinden daaruit aan de hand van (29.2) de absolute:

rel. dimensie abs. dimensie

$\mathcal{F}$	$[L^2]$	$[L^2]$
$\mathcal{D}$	$[L^2]$	$[L^2]$
$\mathcal{B}$	$[L^2]$	$[L^2]$
$\mathcal{E}$	$[L^2]$	$[L^2]$
ρ	$[L^3]$	$[L^3]$
$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$	$[L^4]$	$[L^4]$
$\mu g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}$	$[L^4]$	$[L^4]$

ρ heeft de absolute dimensie $[L^3]$. Het geometrisch beeld is het volume dat de lading q bevat. Nodig voor constructie is dus alleen q .